JACQUES HADAMARD

PSICOLOGÍA DE LA INVENCIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO

Historia y filosofía de la Ciencia



COLECCIÓN
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

DIRIGIDA POR EL PROFESOR
JULIO REY PASTOR

●

Serie Menor

TÍTULOS DE LOS TOMOS

I.	ALDO MIELI. — *El mundo antiguo: griegos y romanos.* (De *Panorama General de Historia de la Ciencia.*)	$	6.—
II.	DESIDERIO PAPP. — *Filosofía de las leyes naturales*	„	4.—
III.	JAKOB VON UEXKÜLL. — *Ideas para una concepción biológica del mundo*	„	5.—
IV.	ROBERTO BONOLA. — *Geometrías no euclidianas*	„	4.—
V.	ALDO MIELI. — *El mundo islámico y Occidente medieval cristiano.* (De *Panorama General de Historia de la Ciencia.*)	„	8.—
VI.	PAUL F. SCHURMANN. — *Luz y calor*	„	7.—
VII.	JULIO TANNERY. — *Ciencia y filosofía*	„	7.—
VIII.	A. COURNOT. — *Tratado del encadenamiento de las ideas fundamentales en la ciencia y en la historia*	„	6.—
IX.	ALDO MIELI. — *La teoría atómica química moderna*	„	8.—
X.	CLAUDE BERNARD. — *El método experimental y otras páginas filosóficas*	„	5.—
XI.	JOSÉ BABINI. — *Origen y naturaleza de la ciencia*	„	7.—
XII.	CARLOS E. PRÉLAT. — *Epistemología de la química*	„	7.—

●

Serie Mayor

DESIDERIO PAPP. — *Historia de la física*	$	14.—
J. R. PARTINGTON. — *Historia de la química*	„	14.—
W. STANLEY JEVONS. — *Los principios de las ciencias*	„	12.—
LUCRECIO. — *De la naturaleza de las cosas*	„	10.—
L. SANTALÓ SORS. — *Historia de la aeronáutica*	„	14.—
W. A. HEIDEL. — *La edad heroica de la ciencia*	„	10.—
L. HOGBEN. — *¿Qué es la materia viva?*		

PSICOLOGÍA DE LA INVENCIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO

JACQUES HADAMARD

PSICOLOGÍA DE LA INVENCIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO

Traducción por L. A. Santaló Sors

19 marzo 1944

ESPASA - CALPE, S. A.

Título del original inglés:
PSYCHOLOGY OF INVENTION IN THE MATHEMATICAL FIELD

Edición expresamente autorizada por
Princeton University Press

A la compagne de ma vie et de mon oeuvre.

ÍNDICE

PREFACIO

"Je dirai que j'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances; ce théorème aura un nom barbare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas; mais cela n'a pas d'importance: ce qui est intéressant pour le psychologue, ce n'est pas le théorème, ce sont les circonstances".

HENRI POINCARÉ

Este estudio, como todo aquel que pueda escribirse sobre la invención matemática, fué en su origen inspirado por la famosa conferencia de Poincaré en la Sociedad de Psicología de París. Volví por primera vez sobre el tema en una reunión que tuvo lugar en el Centro de Síntesis de París en 1937. Finalmente, en un ciclo de conferencias dado en la Escuela Libre de Altos Estudios de Nueva York, en 1943, abordé nuevamente el asunto, tratándolo con más detalle y extensión.

Deseo expresar mi gratitud a la Imprenta de

la Universidad de Princeton por el interés tomado en este trabajo y la cuidadosa ayuda prestada para su publicación.

JACQUES HADAMARD

21 de agosto de 1944.
Nueva York

INTRODUCCIÓN

Debemos, ante todo, hacer dos observaciones referentes al título de este estudio. Hablamos de invención, pero tal vez sería más correcto hablar de descubrimiento. La distinción entre estas dos palabras es bien conocida: el descubrimiento concierne a un fenómeno, a una ley, a un ser que ya existía pero que no había sido percibido. Colón descubrió América, pues ella existía antes que él. Al contrario, Franklin inventó el pararrayos, pues antes de él nunca había existido dicho aparato.

Tal distinción es menos evidente de lo que pudiera parecer a primera vista. Torricelli observó que al invertir un tubo lleno de mercurio, el mismo ascendía hasta una determinada altura: esto es un descubrimiento. Sin embargo, con esta acción Torricelli inventa el barómetro. Como éste, hay otros muchos ejemplos de resultados científicos que son tanto descubrimientos como

invenciones. La invención del pararrayos de Franklin es apenas diferente de su descubrimiento de la naturaleza eléctrica del rayo. Esta es la razón del porqué esta distinción entre descubrimiento e invención no debe preocuparnos, además de que es un hecho que las condiciones psicológicas son completamente las mismas en ambos casos.

Por otra parte, el título de esta obra es "Psicología de la invención en el campo matemático" y no "Psicología de la invención matemática". Puede ser útil tener presente que la invención matemática no es más que un caso particular de la invención en general, de un proceso que puede tener lugar en muchos otros dominios, tanto en la ciencia y el arte como en la técnica.

Los filósofos modernos dicen todavía más. Sostienen que la inteligencia es una perpetua y constante invención y que la vida misma es una perpetua invención. Como expresa Ribot [1]: "La invención en las bellas artes o en las ciencias no es más que un caso especial. En la vida práctica, en las invenciones mecánicas, militares, industriales o comerciales, en las instituciones religiosas, sociales, políticas, la mente humana ha

[1] Ver Delacroix, *L'Invention et le Génie* (en el *Nouveau Traité de Psychologie,* Vol. VI), pág. 449.

gastado y usa tanta imaginación como en cualquier otra cosa", y Bergson ([2]), con una intuición más alta y más general, dice: "El esfuerzo inventivo que se encuentra en todas las ramas de la vida para la creación de nuevas especies, ha encontrado en la humanidad los medios de continuar a través de los individuos, a los cuales ha sido conferido, a través de la inteligencia, facultad de iniciativa, independencia y libertad".

Una comparación tan audaz tiene su análoga en Métchnikoff, quien observa, al final de su libro sobre fagocitosis, que en la especie humana la lucha contra los microbios es la obra no sólo de los fagocitos, sino también del cerebro por haber creado la bacteriología.

No puede decirse que las distintas clases de invención tengan lugar exactamente de la misma manera. Como ha observado el psicólogo Souriau, entre el dominio artístico y el científico hay la diferencia de que el arte goza de una mayor libertad, puesto que el artista está gobernado únicamente por su propia fantasía, de manera que las obras de arte son verdaderas invenciones. Las sinfonías de Beethoven y aun las tragedias de Racine, son invenciones. El científico, en cambio, procede completamente de otra mane-

([2]) *Ibid.*, pág. 447.

ra y su obra pertenece propiamente al descubrimiento. Hermite, mi maestro, decía: "En Matemáticas, nosotros somos más bien servidores que señores". Aunque la verdad puede no sernos conocida todavía, ella preexiste y nos impone, sin posible escapatoria, el camino que debemos seguir para llegar a ella, bajo pena de caer en el error.

Esto no excluye muchas analogías entre estas dos actividades, como ya tendremos ocasión de señalar. Estas analogías aparecieron patentes en 1937 cuando en el Centro de Síntesis de París tuvieron lugar una serie de conferencias sobre las varias clases de invención con la colaboración del gran psicólogo ginebrino Claparède.

Se dedicó una semana entera a discutir las diferentes clases de invención, con una sesión dedicada especialmente a la invención en matemáticas. En particular, la invención en las ciencias experimentales fué tratada por Louis de Broglie y Bauer; la invención en poesía, por Paul Valéry. La comparación entre las circunstancias de la invención en estos diversos campos sería un estudio de mucho interés.

Una contribución a este estudio puede ser, tal vez, referirse a un caso especial, como el caso de las matemáticas que voy a exponer a conti-

nuación por ser el que mejor conozco. Los resultados en una determinada esfera (y ya veremos que los alcanzados en la esfera matemática han sido muy importantes gracias a la magistral conferencia de Henri Poincaré) pueden siempre ser útiles para comprender lo que sucede en otras.

I. — GENERALIDADES Y PROBLEMAS

El asunto que vamos a tratar, a pesar de que sigue presentando todavía muchos misterios por aclarar, está lejos de ser inexplorado, y se han podido reunir numerosos datos, más abundantes y coherentes de lo que podría haberse esperado dada la dificultad del problema.

Esta dificultad no es solamente intrínseca, sino de naturaleza tal que muchas veces impide el progreso de nuestros conocimientos: me refiero al hecho de que el estudio de la cuestión requiere dos disciplinas, psicología y matemáticas, y por tanto es preciso, para poder tratarla debidamente, ser al mismo tiempo psicólogo y matemático. Debido a la falta de una mentalidad que reúna ambas cualidades, el asunto ha sido investigado por matemáticos por un lado, por psicólogos por otro y aun, como veremos, también por un neurólogo.

Como ocurre siempre en psicología, pueden

seguirse dos clases de métodos: métodos "subjetivos" o métodos "objetivos" ([1]).

Los métodos subjetivos (o "introspectivos") son los que podrían llamarse "por observación desde el interior", es decir, aquellos cuya información acerca de los caminos del pensamiento se obtiene directamente por el mismo pensador, el cual, observándose interiormente, relata después sobre su propio proceso mental. La desventaja evidente de este procedimiento consiste en que el observador puede pertubar el verdadero fenó-

([1]) Hablo de métodos objetivos y de métodos introspectivos (o subjetivos), si bien los modernos objetivistas (*behaviorists*) distinguen entre *psicología* objetiva y *psicología* introspectiva (esta última considerada ya como anticuada desde la muerte de William James y de Titchener), como si se tratara de dos ciencias diferentes, mientras que a mí me parece que ambas clases de métodos pueden aplicarse e incluso ayudarse mutuamente en el estudio de los mismos procesos psicológicos. Comprendo, sin embargo, que para los objetivistas (*behaviorists*), el objeto de la introspección, es decir, el pensamiento y la conciencia, debe ser ignorado.

Ya en otros tiempos, el prominente biólogo Le Dantec eliminó la conciencia, calificándola de "epifenómeno". Siempre he considerado esto como una actitud anticientífica, puesto que si la conciencia fuera un epifenómeno, sería el único epifenómeno de la naturaleza, donde todo actúa sobre todo lo demás. Sin embargo, sea epifenómeno o no, el hecho es que existe y puede ser observada. No considero injustificado, por tanto, presentar observaciones introspectivas, hechas por nosotros mismos o por otros, como haremos en este estudio.

Debemos observar que muchos casos considerados por los objetivistas (*behaviorists*), como lo encuentro en el *"Behaviorism"* de J. B. Watson, son muy distintos de aquellos que nos

meno que está investigando. En efecto, puesto que ambas operaciones —pensar y observar el pensamiento— deben tener lugar al mismo tiempo, hay que suponer *a priori* que es muy posible que se perturben mutuamente. Veremos, sin embargo, que en el proceso de invención (por lo menos en varias de sus etapas) esta perturbación debe ser menos temida que en otros fenómenos mentales. En el presente estudio voy a utilizar los resultados de la introspección, únicos de los que me considero competente para hablar. En nuestro caso estos resultados son suficientemente claros para merecer, según parece, un cierto grado de confianza. Con esto salgo al paso a una objeción de la cual me disculpo de antemano, a saber: el autor estará obligado a hablar demasiado acerca de sí mismo.

Los métodos objetivos —por observación desde

conciernen a nosotros, puesto que generalmente son tomados de pensamientos que están en relación directa con nuestras sensaciones corporales y que son más fáciles de interpretar que los otros de acuerdo con su doctrina. En tales casos, son fácilmente visibles y más o menos conocidas las correspondencias entre los fenómenos corporales y los estados de la conciencia. En cambio, dichas correspondencias aparecen más ocultas en los casos del pensamiento abstracto, como son los que vamos a estudiar, pero no hay razón para que estas correspondencias no sean descubiertas en el futuro. Esto puede suceder, por ejemplo, con la ayuda de las ondas eléctricas que acompañan a los procesos cerebrales (sugestión que tomo de un artículo de Henri Laugier en la *Revue Moderne*, reproducido en su libro *Service de France au Canada*).

afuera— son aquellos en los cuales el experimentador no es el mismo pensador. En este caso la observación y el pensamiento no interfieren entre sí; pero, por otra parte, de esta manera se obtienen únicamente informaciones indirectas, cuyo significado no se comprende fácilmente. Una razón fundamental del porqué estos métodos son difíciles de emplear en nuestro caso, es que ellos exigen la comparación de numerosos casos particulares. De acuerdo con el principio general de toda ciencia experimental, ésta es una condición esencial para llegar al "hecho de gran rendimiento" que señala Poincaré, es decir, al hecho que penetra profundamente en la naturaleza de la cuestión. Pero precisamente estos ejemplos no pueden encontrarse para un fenómeno tan excepcional como el de la invención.

LA "HINCHAZÓN" MATEMÁTICA. Los métodos objetivos han sido aplicados casi siempre a la invención en general, sin dedicar especial atención a la investigación matemática. Una excepción, que debemos mencionar brevemente, lo constituye un curioso intento iniciado por el célebre Gall. Se relaciona con el principio de su llamada "frenología", es decir, con la conexión entre toda aptitud mental y el desarrollo no solamente de alguna parte del cerebro, sino tam-

bién de la parte correspondiente del cráneo; idea completamente inaceptable, según los modernos neurólogos, de un hombre que tuvo, en cambio, otras ideas muy fecundas (fué, en efecto, un precursor de la noción de la localización cerebral). De acuerdo con dicho principio, la capacidad matemática debería estar caracterizada por una "hinchazón" o protuberancia en la cabeza, en un lugar que Gall se encargaba de localizar.

Las ideas de Gall fueron proseguidas en 1900 (2) por el neurólogo Möbius, nieto de un conocido matemático, pero que no poseía conocimientos especiales sobre esta disciplina.

El libro de Möbius constituye un extenso estudio de la habilidad matemática desde el punto de vista naturalista y contiene una serie de datos que pueden ser de interés para este estudio. Se ocupa, por ejemplo, de la herencia (familias de matemáticos) (3), longevidad, otras habilidades de los matemáticos, etc.

(2) *Die Anlage zur Mathematik,* Leipzig.

(3) Bastantes años antes, en 1869, se publicó la importante obra de Francis Galton titulada *Hereditary Genius* (Londres y Nueva York), en la cual se dedica un extenso capítulo a los hombres de ciencia.

Con referencia a los métodos utilizados en el libro de Möbius, podemos indicar que también contiene interesantes datos el libro de Leonard George Guthrie titulado *Contributions to the study of Precocity in Children* (Contribuciones al estudio de la precocidad en los niños), donde se estudian las inclinaciones juve-

Aunque una colección tan importante de datos puede ser útil para comparar con otros posteriores, parece sin embargo que no se llegó a ninguna regla general, excepto en lo referente a las inclinaciones artísticas de los matemáticos (Möbius confirma la opinión, en cierta manera clásica, de que la mayoría de los matemáticos sienten afición por la música, y asegura que suelen mostrar también interés por otras artes).

Möbius coincide en general con las conclusiones de Gall, observando, sin embargo, que la "hinchazón" matemática, si bien siempre existente, puede tomar una mayor variedad de formas que las deducidas de la descripción de este último.

A pesar de ello, la hipótesis de la "hinchazón" matemática de Gall-Möbius no ha tenido aceptación. Anatomistas y neurólogos la atacaron briosamente, llamándola hipótesis de "Gall redivivo"

niles de los hombres célebres. Para hablar únicamente de matemáticos, la primera vocación de Galileo fué hacia la pintura; después, a los 17 años, empezó a estudiar medicina y únicamente mas tarde se dedicó a las matemáticas. La primera educación de William Herschell fué musical. Por otra parte, es conocido que Gauss dudaba entre la matemática y la filología.

Ejemplos similares existen referentes a hombres contemporáneos. He oído del mismo Paul Painlevé que en su juventud dudaba entre dedicarse a las matemáticas o la vida política; optó en un principio por lo primero, pero, como es bien sabido, terminó por abarcar ambas actividades.

y coincidiendo en que el principio frenológico de Gall, es decir, la adaptación del cráneo a la forma del cerebro, debe considerarse infundado.

No insistiremos más sobre esta fase de la cuestión, que dejamos a los especialistas, pero no será superfluo hablar un poco de ella desde el punto de vista matemático. También desde este punto de mira pueden hacerse diversas objeciones, por lo menos a primera vista, contra el verdadero principio de tales investigaciones. Es más que dudoso que exista una "aptitud matemática" bien definida. La creación y la inteligencia matemática no están sin relación con la creación en general y con la inteligencia en general. Raramente sucede en las escuelas superiores que el alumno que es primero en matemáticas sea el último en otras ramas de sus estudios; y además, considerando un nivel más alto, una gran proporción de matemáticos eminentes han sido también insignes creadores en otros campos. Uno de los más grandes, Gauss, llevó a cabo importantes y clásicos experimentos sobre magnetismo y también son bien conocidos los fundamentales descubrimientos de Newton sobre óptica. La forma de la cabeza de Descartes o de Leibniz ¿fué influída por sus habilidades como matemáticos o por sus habilidades como filósofos?

También hay una contrapartida. Veremos que

no existe una sola, sino varias categorías de inteligencias matemáticas, cuyas diferencias son lo suficientemente importantes para hacer dudar de que tales inteligencias puedan corresponder a una misma característica del cerebro.

Todo esto no sería contradictorio con el principio de Gall interpretado de manera general, es decir, como interdependencia entre el funcionamiento matemático de la inteligencia y la psicología y anatomía del cerebro; pero la primera aplicación que de este principio proponen Gall y Möbius no parece estar justificada.

En general debemos admitir que las facultades mentales que parecen simples a primera vista, son complejas hasta un grado insospechado. Por métodos objetivos (observación de los efectos de ciertas heridas u otros defectos de la cabeza), esto ha sido reconocido en el caso de la facultad mejor conocida, la del lenguaje, que a su vez se compone de otras varias facultades parciales. Existen por tanto, según Gall, localizaciones cerebrales, pero sin que las correspondencias sean tan simples ni precisas como él supuso.

Es razonable suponer que la facultad matemática sea por lo menos tan compleja como se ha visto que es la facultad del lenguaje. Aunque, evidentemente, no existen ni posiblemente podrán obtenerse nunca, documentos decisivos pa-

ra el primer caso, mientras que si ha sido posible obtenerlos para el segundo, no hay duda de que las observaciones sobre uno de estos fenómenos pueden ayudar a comprender el otro.

OPINIONES DE LOS PSICÓLOGOS SOBRE LA CUESTIÓN. Si bien no especialmente sobre la invención matemática, muchos psicólogos han meditado también sobre la invención en general. Entre ellos mencionaremos únicamente dos nombres: Souriau y Paulhan, cuyas opiniones presentan un notable contraste entre sí. Souriau (1881) parece que fué el primero en sostener que la invención ocurre por pura casualidad, mientras que Paulhan (1901) [4] permanece fiel a la teoría más clásica de suponerla consecuencia del razonamiento lógico y sistemático. Hay también una diferencia de método, difícilmente explicable dada la poca diferencia de fechas, y que consiste en que mientras Paulhan toma mucha información de científicos e inventores diversos, es raro encontrar estos testimonios en la obra de Souriau. Es curioso, sin embargo, que operando de esta manera llega este último a hacer varias observaciones acertadas e ingeniosas, si bien, por

[4] Souriau, *Théorie de l'Invention* (París, 1881). **Paulhan,** *Psychologie de l'Invention.*

otra parte, no ha podido evitar uno o dos errores de importancia que deberemos mencionar.

Más tarde el estudio más importante en esta direción fué llevado a cabo (1937) en el Centro de Síntesis de París, como dijimos en la introducción.

ENCUESTAS MATEMÁTICAS. Pasemos a los matemáticos. Uno de ellos, Maillet, inició una primera encuesta para conocer sus métodos de trabajo. En particular abordó una famosa cuestión, la del "sueño matemático", referente a la idea de que la solución de problemas que se han resistido a la investigación puede aparecer durante el sueño.

Sin que permita asegurar la absoluta inexistencia del "sueño matemático", la encuesta de Maillet prueba que no debe ser considerado como de un significado serio. Un solo caso notable es relatado por el insigne matemático norteamericano Leonard Eugene Dickson, quien afirma poder asegurar positivamente su veracidad. Su madre y una hermana de ella, que eran en la misma escuela rivales en geometría, habían perdido una larga velada intentando inútilmente resolver un cierto problema. Durante la noche la madre de Dickson soñó con el problema y empezó a desarrollar la solución en alta y clara voz, que

permitió a la hermana levantarse y tomar nota. A la mañana siguiente, esta última pudo presentar la solución así obtenida, la cual seguía siendo desconocida por la madre de Dickson.

Este caso, de suma importancia dada la personalidad del relator y su autorizado testimonio, es uno de los más extraordinarios. Exceptuado este caso tan curioso, la mayoría de los matemáticos que contestaron a Maillet sobre la cuestión nunca habían experimentado ningún sueño matemático (el autor, personalmente, tampoco lo ha experimentado), o bien, a este respecto, relatan que soñaron cosas absurdas o fueron incapaces de recordar exactamente las imágenes soñadas. Cinco de ellos soñaron con argumentos completamente ingenuos. Hubo una respuesta más positiva, pero sería peligroso tenerla en cuenta dado que el autor se mantuvo anónimo.

Por otra parte, sobre esta cuestión existe una confusión que puede provocar graves dudas. Un fenómeno es cierto y yo puedo garantizar su absoluta certeza: la súbita e inmediata aparición de la solución de un problema en el preciso instante de un despertar repentino. Una vez, habiendo sido bruscamente despertado por un ruido exterior, una solución (5) largo tiempo bus-

(5) Para los especialistas: el comienzo del N. 27 (págs. 199-200)

cada se me apareció al instante sin el más leve momento de reflexión de mi parte —el hecho fué lo suficientemente notable para impresionarme hasta el punto de no haberlo olvidado nunca más— y según una dirección completamente diferente de las que había anteriormente intentado seguir. Sin duda, un fenómeno de este tipo, absolutamente cierto en mi caso, puede fácilmente ser confundido con un "sueño matemático", del cual, sin embargo, difiere.

No seguiré ocupándome de la encuesta de Maillet por haberse llevado a cabo unos años más tarde, por varios matemáticos y con la colaboración de Claparède y otro prominente psicólogo ginebrino, Flournoy, otra encuesta más importante que fué publicada en la revista *L'Enseignement Mathématique*. Se presentó un extenso cuestionario que contenía algo más de 30 preguntas (véase el Apéndice I). Estas preguntas (entre las cuales estaba incluída la del "sueño matemático") pertenecían indistintamente a las dos clases de métodos de investigación que hemos distinguido anteriormente, siendo algunas de ellas "objetivas" (hasta donde pueden serlo las preguntas de un cuestionario). Por ejemplo, se preguntaba a los matemáticos si se notaban

en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* Serie 4, Vol. IX, 1898 (evaluación de un determinante).

influídos por los ruidos y con qué intensidad, o bien por las circunstacias meteorológicas, o bien si las actividades literarias o artísticas del pensamiento debían considerarse como útiles o perniciosas.

Otras preguntas eran de un carácter más introspectivo y penetraban más directa y profundamente en la naturaleza de la cuestión. Se preguntaba, por ejemplo, a los autores, si sentían profundo interés por la lectura de las obras de sus antecesores o bien si, por el contrario, preferían estudiar los problemas directamente por sí mismos; si tenían la costumbre de abandonar el problema por un tiempo para volver más tarde sobre el mismo (lo que yo hago en muchos casos y recomiendo siempre hacer a los principiantes que me consultan). Particularmente se les preguntaba sobre lo que pudieran decir acerca de la génesis de sus principales descubrimientos.

Algo de crítica. Leyendo el cuestionario mencionado, se observa la falta de varias preguntas, incluso algunas no muy diferentes de las efectivamente formuladas. Por ejemplo, al preguntar a los matemáticos su posible predilección por la música o la poesía, el cuestionario no menciona el posible interés por otras ciencias apar-

te de la matemática. En especial, la biología, como observaba Hermite, puede ser un estudio muy útil para los matemáticos, por las analogías que presentan muchas veces ambas clases de disciplinas.

Análogamente, al preguntar acerca de la influencia de las circunstancias meteorológicas o la existencia de períodos de exaltación o de depresión, se deja a un lado la pregunta más precisa referente a la influencia del estado físico del investigador y en especial de las emociones que puede sufrir. Esta cuestión es del mayor interés, sobre todo después de la observación de Paul Valéry en una conferencia en la Sociedad Francesa de Filosofía, en la cual sugiere que las emociones influyen de manera evidente sobre la producción poética. Ahora bien, aunque a primera vista pudiera parecer que ciertas clases de emociones pueden favorecer a la poesía debido a que ellas encuentran su expresión más o menos directamente en la poesía misma, no es cierto que esta causa sea la verdadera o, por lo menos, la única. En efecto, conozco por experiencia personal que las emociones íntimas pueden favorecer aspectos de creación mental completamente diferentes (por ejemplo, el aspecto matemático) (6). A este respecto estoy de acuerdo con la

(6) El encuentro mencionado de la solución de un problema

notable afirmación de Daunou: "En las ciencias, inclusive las más rígidas, ninguna novedad ha nacido de genios como un Arquímedes o un Newton, sin la emoción poética y alguna vibración de naturaleza inteligente".

Por otra parte, la cuestión esencial —la referente a la génesis del descubrimiento— sugiere otra que no se menciona en el cuestionario, a pesar de su evidente interés. Se pregunta a los matemáticos cómo han conseguido sus éxitos. Ahora bien, no todo son éxitos, sino que también hay fracasos y los motivos de éstos son por lo menos tan interesantes como los de aquéllos.

Esta observación se relaciona con la crítica más importante que puede formularse contra las encuestas tanto de Maillet como de Claparède y Flournoy: en efecto, tales encuestas están sujetas a una causa de error que difícilmente pueden evitar. ¿Quién puede ser considerado como matemático, particularmente como matemático cuyo proceso creador tenga un verdadero interés? La mayoría de las respuestas que llegaron a los autores del cuestionario provinieron de matemáticos cuyos nombres son completamente desconocidos en nuestro tiempo. Esto justifica que no fueran interrogados sobre las razones de

en el momento mismo de un brusco despertar, me sucedió durante uno de estos períodos emocionales.

sus fracasos, pues únicamente los hombres de primera fila se atreven a hablar de ellos. En las encuestas mencionadas, apenas se encuentran uno o dos nombres significativos, entre ellos el físico-matemático Boltzmann. Maestros como Appell, Darboux, Picard, Painlevé no contestaron, lo cual fué quizá un error de su parte.

Puesto que la mayoría de las respuestas a las encuestas de Maillet y de *L'Enseignement Mathématique* tuvieron escaso interés por esta razón, se me ocurrió someter las mismas preguntas a un hombre cuya creación matemática es una de las más audaces y profundas: Jules Drach. Varias de sus respuestas fueron especialmente sugestivas, por ejemplo en lo referente a su interés, igual que en Hermite, por la biología, y a su afición por la lectura de los trabajos de los descubridores precedentes. Es ésta una cuestión respecto a la cual, incluso entre matemáticos natos, parecen que existen importantes diferencias mentales. Los historiadores de la asombrosa vida de Evaristo Galois nos han relatado, según el testimonio de uno de sus condiscípulos, que durante el período escolar detestaba leer tratados de álgebra debido a que notaba la falta en ellos de los rasgos característicos de los inventores. Pues bien, Drach, cuya obra, por otra parte, está íntimamente relacionada con la de Galois, siente las

mismas inclinaciones. Siente siempre el deseo de referirse a la forma misma en que los descubrimientos han aparecido a sus autores. Por el contrario, la mayoría de los matemáticos que contestaron a la encuesta de Claparède y Flournoy preferían, para estudiar una obra, pensarla de antemano e intentar descubrirla de nuevo por sí mismos. Ésta es también mi manera de preceder, de manera que el mío puede servir de ejemplo en este caso.

OPINIONES DE POINCARÉ. Prescindamos de la encuesta de *L'Enseignement Mathématique*, que si bien, como ya expresamos, puede decirse que fracasó por no distinguir adecuadamente entre aquellos que contestaron, tuvo por otra parte la suerte de provocar, un poco más tarde, el testimonio más autorizado que podía desearse obtener. Las condiciones de la invención han sido investigadas, en efecto, por el genio más grande que nuestra ciencia ha conocido durante el último medio siglo, por el hombre cuyo impulso se extiende a través de toda la ciencia matemática contemporánea. Me refiero a Henri Poincaré y a su famosa conferencia en la *Société de Psychologie* de París (7). Las observaciones de Poincaré arrojan una resplandeciente luz sobre las

(7) "Mathematical Creation" en *The Foundations of Science.*

relaciones entre el consciente y el inconsciente, entre los caracteres lógicos y fortuitos que están en la misma base del problema. No obstante las posibles objeciones que serán discutidas a su debido tiempo, las conclusiones a que él llega en dicha conferencia me parecen completamente justificadas y, por lo menos en las cinco primeras Secciones, voy a seguirlas detenidamente ([8]).

El ejemplo de Poincaré está tomado de sus más grandes descubrimientos, el primero que consagró su gloria: la teoría de los grupos fuchsianos y de las funciones fuchsianas. En primer lugar debo tomar las mismas precauciones que Poincaré y advertir que nos será preciso utilizar términos técnicos sin que el lector tenga necesidad de entenderlos: "Debo decir, por ejemplo", dice, "que he encontrado la demostración de tal teorema bajo tales circunstancias. Este teorema tendrá un nombre extraño, no familiar para muchos, pero ello carece de importancia; lo que es de interés para el psicólogo no es el teorema, sino las circunstancias" ([9]).

Traducido al inglés por G. Bruce Halsted (Nueva York, 1913), pág. 387.

([8]) Las citas de las páginas que siguen, de las cuales no se menciona el autor, están tomadas de la conferencia de Poincaré.

([9]) Poincaré se ocupa del caso de los matemáticos. Como me sugiere el Dr. de Saussure, al cual debo agradecer interesantes observaciones, la independencia entre el proceso de invención

Vamos a hablar, por consiguiente, de funciones fuchsianas. Primeramente Poincaré dedicóse en vano al asunto durante unos quince días, intentando probar que tales funciones no podían existir, idea que luego encontró que era falsa. En efecto, durante una noche de insomnio y bajo condiciones acerca de las cuales tendremos que volver, logró construir una primera clase de tales funciones. Se le planteó entonces el problema de hallar una expresión para las mismas.

"Intenté representar esas funciones por el cociente de dos series; esta idea era perfectamente consciente y deliberada, dejándome guiar por la analogía con las funciones elípticas. Me pregunté cuáles eran las propiedades que debían poseer estas series, caso de que existieran, y llegué sin dificultad a formar las series que llamé *thetafuchsianas*.

"En esta época salí de Caen, donde vivía, para realizar una excursión geológica con el patrocinio de la Escuela de Minas. Los incidentes del viaje me hicieron olvidar mi problema matemático. Habiendo llegado a Coutances, íbamos a tomar un ómnibus para trasladarnos a cierto lugar. En el instante en que puse el pie en el estribo me vino la idea, sin que ninguno de mis

y la cosa inventada puede ser menor en cuestiones más concretas (véase más adelante, Sección IX, pág. 215).

pensamientos anteriores pareciese haber allanado el camino para ello, de que las transformaciones que había usado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclidiana. No verifiqué la idea; no hubiera tenido tiempo, puesto que al ocupar mi asiento en el ómnibus renudé una conversación ya empezada, pero tuve la sensación de su perfecta exactitud. Al regresar a Caen, para tranquilidad de mi conciencia, comprobé el resultado con detenimiento.

"Más tarde dirigí mi atención hacia el estudio de ciertas cuestiones aritméticas, aparentemente sin mucho éxito y sin sospechar ninguna conexión entre ellas y mis investigaciones precedentes. Disgustado por mi poco éxito, fuí a pasar unos días a la playa para pensar en cualquier cosa. Una mañana, paseando por la costa, me vino la idea, con las mismas características de brevedad, instantaneidad e inmediata sensación de certeza, que las transformaciones aritméticas de las formas cuadráticas ternarias indefinidas eran idénticas a las de la geometría no euclidiana".

Estos dos resultados probaron a Poincaré que existían otros grupos fuchsianos y, en consecuencia, otras funciones fuchsianas además de la encontrada durante su noche de insomnio. Las últimas constituían solamente un caso especial y

se presentaba así la cuestión de investigar el caso general. En este punto tropezó con dificultades más serias, que un esfuerzo continuado y consciente le permitió definir más adecuadamente, pero no vencer de primer golpe. Entonces, de nuevo, la solución se le apareció inesperadamente, tan sin preparación previa como en las otras dos circunstancias, mientras estaba sirviendo en el ejército.

Añade Poincaré: "Lo más sorprendente a primera vista es este carácter de iluminación instantánea, signo manifiesto de que debe precederle un trabajo profundo e inconsciente. La intervención de este trabajo inconsciente en la investigación matemática me parece indiscutible".

MIRANDO AL PROPIO INCONSCIENTE. Antes de examinar la última conclusión, resumamos la historia de aquella noche de insomnio que inició toda la obra memorable y que antes hemos dejado a un lado por ofrecer características especiales.

"Una noche", dice Poincaré, "contrariamente a mi costumbre tomé café negro y no podía dormir. Se me presentaban multitud de ideas que sentía chocar entre sí hasta agruparse en pares y formar, por decirlo así, combinaciones fijas".

Este extraño fenómeno es de lo más excepcional y probablemente del mayor interés para los psicólogos. Poincaré nos dice que en él era bastante frecuente: "En tales casos parece que uno estuviera presente ante la obra de su inconsciente, que se hace en parte perceptible por un consciente sobreexcitado, sin cambiar, sin embargo, su naturaleza. Entonces comprendemos vagamente lo que distingue los dos mecanismos o bien, si así se desea, los métodos de trabajo de los dos *egos*".

Este hecho extraordinario de observar pasivamente, como desde el exterior, la evolución de las propias ideas subconscientes, parece ser una cualidad especial de Poincaré. Nunca he experimentado esta sensación maravillosa ni he oído que sucediera a nadie más.

EJEMPLOS EN OTROS CAMPOS. Lo que Poincaré describe en la parte restante de su conferencia es, por lo contrario, absolutamente general y común a todo investigador. Así, Gauss, refiriéndose a un teorema de aritmética que había intentado inútilmente resolver durante años, escribe: "Finalmente, hace dos días, conseguí resolverlo, no por mis pacientes trabajos, sino por la gracia de Dios. Como si un relámpago repentino lo iluminara, el enigma quedó resuelto. Yo

mismo soy incapaz de decir cuáles fueron los hilos que conectaron lo que me era conocido anteriormente con lo que hizo posible mi éxito".

Es innecesario observar que lo que me sucedió a mí en el despertar referido es perfectamente similar y típico, puesto que la solución que se me apareció: 1) no tenía relación con los intentos de los días anteriores, de manera que no podía ser elaborada por mi trabajo consciente anterior; 2) apareció instantáneamente, sin el más breve tiempo para pensar.

El mismo carácter de instantaneidad y espontaneidad había sido referido, algunos años antes, por otro gran científico contemporáneo, Helmholtz, quien lo cuenta en una importante conferencia que tuvo lugar en 1896. Desde Helmholtz y Poincaré el fenómeno ha sido reconocido por los psicólogos como completamente general en toda clase de invención. Graham Wallas en su *Arte de pensar* propone llamarle "iluminación", fenómeno que va precedido generalmente por un período de "incubación", durante el cual el estudio parece estar completamente interrumpido y el problema abandonado. Tal iluminación es también mencionada en varias de las respuestas a la encuesta de *L'Enseignement Mathématique.*

Otros físicos, como Langevin, y químicos co-

mo Ostwald nos dicen haberlo también experimentado.

En campos completamente diferentes podemos citar asimismo algunos ejemplos. Uno de ellos, que ha llamado la atención del psicólogo Paulhan, es una famosa carta de Mozart:

"Cuando me siento bien y de buen humor, o cuando hago un paseo en coche o a pie después de una buena comida, o bien por la noche cuando no puedo dormir, los pensamientos se agolpan en mi mente con tanta facilidad como usted pueda desear. ¿De dónde y cómo vienen? No lo sé ni puedo sospecharlo. Los que me gustan los retengo en la mente y los tarareo en voz baja o, por lo menos, así me han dicho algunos que hago. Una vez que tengo mi tema, viene otra melodía, enlazándose ella misma con la primera de acuerdo con las necesidades de la composición en conjunto ;el contrapunto, la parte de cada instrumento y todos esos fragmentos melódicos producen finalmente la obra entera. Entonces, si no ocurre nada que distraiga mi atención, mi alma arde de inspiración. La obra crece, contemplo su crecimiento, concibiéndola cada vez más claramente hasta que tengo toda la composición terminada en mi cabeza, por larga que sea. Mi mente la percibe entonces como un destello de mis ojos podría percibir un hermoso cuadro o

una bella joven. No se me presenta sucesivamente, con sus diversas partes detalladas como ocurrirá más tarde, sino que mi imaginación me la permite escuchar en su conjunto.

"Ahora bien, ¿cómo puede ser que mientras trabajo mi composición, tome la forma y el estilo que caracteriza a Mozart y no el de ningún otro? Por la misma razón que mi nariz es grande y aguileña, que es la nariz de Mozart y no la de ningún otro. No me gusta la originalidad y me vería en un apuro para describir mi estilo. Es completamente natural que quien realmente tiene algo de particular en sí mismo sea diferente de los demás, tanto externa como internamente".

La inspiración poética es también repentina, como resulta del caso de Lamartine, que podía componer versos instantáneamente, sin el menor instante de reflexión, y de las sugestivas manifestaciones de nuestro gran poeta Paul Valéry hechas en la Sociedad Filosófica Francesa:

"En este proceso hay que distinguir dos etapas: Una en la que el hombre cuya ocupación es escribir experimenta una especie de relámpago . . . por lo cual la vida intelectual, nada pasiva, está en realidad hecha de fragmentos; está, en cierta manera, compuesta de elementos muy breves, a pesar de sentirse muy rica en posibilidades, que no iluminan toda la mente, sino que,

más bien, le indican que existen formas completamente nuevas que está segura de poder poseer después de cierto trabajo. Algunas veces he observado este fenómeno cuando llega a la mente cierta sensación; es un relámpago de luz, que deslumbra más que ilumina. Esta llegada llama la atención, indica, más que ilumina y, finalmente, es por sí misma un enigma que lleva consigo la seguridad de que puede ser diferida. Ustedes dicen "Veo y por consiguiente mañana veré más". Es una actividad, una sensibilización especial, pronto ustedes pasarán al cuarto oscuro y se verá surgir las imágenes.

"No puedo afirmar que esto esté bien descripto, pues es extremadamente difícil de describir . . . "

Análogamente, según afirma Catherine Patrick en un artículo que citamos más adelante (nota 10 de la Sección III), el poeta inglés A. E. Housman en una conferencia dada en Cambridge, Inglaterra (véase su interesante librito *The Name and Nature of Poetry*) describe también esta espontánea y casi siempre involuntaria creación, alternada eventualmente con esfuerzos conscientes.

Observaciones análogas ocurren en la vida ordinaria. ¿No sucede frecuentemente que el nombre de una persona o de un lugar que se ha tra-

tado en vano de recordar se nos aparece repentinamente cuando ya no se piensa más en ello?

Que este hecho es más análogo al proceso de creación de lo que pudiera parecer a primera vista lo atestigua una observación de Remy de Gourmont según la cual la verdadera palabra para expresar una idea se encuentra también muy a menudo, después de larga e infructuosa búsqueda, cuando ya se está pensando en otras cosas. Este caso es interesante por presentar un carácter intermedio, siendo evidentemente análogo al precedente y no obstante pertenecer ya al campo de la invención.

Semejante a la observación anterior se puede señalar el conocido proverbio: "Soñar con ello". Como dijimos en la introducción, siguiendo a los filósofos modernos y tomando la palabra en sentido amplio, la observación anterior puede también considerarse como perteneciente al dominio de la invención.

La hipótesis de la casualidad. El biólogo Nicolle ([10]) menciona también inspiraciones creadoras e insiste tenazmente sobre ellas. Sin embargo, es necesario discutir la manera como las interpreta.

Para Poincaré, como vimos, hay manifestacio-

([10]) *Biologie de l'Invention,* págs. 5-7.

nes evidentes de un trabajo previo inconsciente, y debo decir que no veo cómo este punto de vista puede ser discutido seriamente.

Sin embargo, Nicolle no lo acepta o, mejor dicho, no habla del inconsciente: "El inventor", escribe, "no conoce la prudencia ni su hermana menor la lentitud. No sondea el fondo ni evita escollos. Salta inmediatamente sobre el terreno inexplorado y, por este solo acto, lo conquista. El problema, hasta entonces obscuro, que las débiles lámparas ordinarias no habrían podido revelar, queda al instante inundado de claridad, como por obra de un rayo luminoso. Es como si se tratara de una creación. Contrariamente a las adquisiciones progresivas, estas creaciones no deben nada a la lógica ni a la razón. El descubrimiento es un accidente".

Ésta es, en su forma más exagerada, la tesis de la casualidad, que algunos otros psicólogos, como Souriau, han proseguido.

No solamente no puedo aceptar esta hipótesis, sino que difícilmente puedo entender cómo un científico como Nicolle puede haber concebido semejante idea. Cualquiera que sea el respeto que debemos tener por la gran personalidad de Charles Nicolle, la explicación "por pura casualidad" es equivalente a la no explicación y a la afirmación de la existencia de efectos sin causa.

¿Habría satisfecho a Nicolle la explicación de que la difteria —o el tifus, que tan admirablemente investigó— son el resultado de la pura casualidad? Aun sin entrar ahora en el análisis que haremos en la sección siguiente, casualidad es casualidad, es decir, tiene el mismo sgnificado para Nicolle que para Poincaré o que para el hombre de la calle. La casualidad no puede explicar cómo el descubrimiento de la causa del tifus fué hecho por Nicolle (es decir, por una persona que ya había trabajado en múltiples cuestiones científicas y realizado, con rara habilidad, repetidas experiencias durante años) y no por alguna de sus enfermeras. Lo mismo puede decirse en el caso de Poincaré: si la casualidad pudiera explicar una de las geniales intuiciones que describe en su conferencia —lo que no creo posible— ¿cómo podría la explicación extenderse a todas aquellas que refiere haberle ocurrido, sin hablar de todas las que le habrán ocurrido a través de las varias teorías que constituyen su inmensa obra y que han transformado casi todas las ramas de la matemática? De la misma manera podría uno imaginarse, de acuerdo con la comparación tan conocida, un mono golpeando al azar el teclado de una máquina de escribir y escribiendo la Constitución norteamericana.

Esto no quiere decir que la casualidad no ejerza su parte de influencia en los procesos de invención ([11]). La casualidad actúa. En la Sección III veremos de qué manera ella actúa dentro del inconsciente.

([01]) Por limitarnos al campo de las matemáticas nos referimos únicamente al azar *psicológico,* es decir, a los procesos mentales fortuitos. Como observa Claparède (Reunión del Centro de Síntesis de 1937), este azar debe distinguirse del azar *externo,* como el ocurrido en el caso bien conocido de las ranas de Galvani, el cual puede muchas veces desempeñar el papel inicial en los descubrimientos experimentales.

II. — DISCUSIONES SOBRE EL INCONSCIENTE

Aunque el estudio del inconsciente, entendido en sentido estricto, es cuestión que compete a los psicólogos profesionales, está sin embargo tan estrechamente vinculado con nuestro objetivo principal, que no podemos dejarlo a un lado.

Es harto evidente, según lo dicho anteriormente, que aquellas iluminaciones súbitas del pensamiento, que pueden llamarse inspiraciones, no pueden ser producidas por mera casualidad: no puede haber duda sobre la necesidad de la intervención de ciertos procesos mentales previos desconocidos al inventor o bien, en otros términos, de procesos inconscientes. En efecto, después de haber visto, como veremos repetidas veces en lo sucesivo, al inconsciente en acción, es difícil tener duda alguna sobre su existencia.

Aunque observaciones de la vida cotidiana nos prueban su existencia, y aunque la misma haya

sido reconocida desde el tiempo de San Agustín y por maestros como Leibniz, no por ello el inconsciente ha dejado de ser discutido. El hecho de ser desconocido al propio interesado da al inconsciente una tal apariencia de misterio que hace haya sido tratado, por los diversos autores, igualmente con excesiva censura que con excesivo fervor. Muchos autores se han opuesto tenazmente a admitir los fenómenos inconscientes. Para hablar de un caso directamente relacionado con la invención, es difícil comprender cómo todavía en 1852, después de siglos de estudios psicológicos, se puede leer en una obra sobre la invención ([1]) una afirmación como la siguiente: "Esas aparentes adivinaciones, esas conclusiones inmediatas deben explicarse de manera natural por leyes conocidas [?] : la mente piensa o bien por analogía o bien por hábito; de esta manera la mente salta sobre los intermediarios", ¡como si el hecho de saltar sobre intermediarios que no pueden ser conocidos no fuera, por definición, un proceso mental inconsciente! Uno no puede dejar de recordar a este respecto a los pacientes de Pierre Janet, los cuales, obedeciendo su consejo "no veían" las cartas marcadas con una cruz... las cuales, sin embargo, debían necesa-

([1]) Desdouits, *Théorie de l'Invention.*

riamente ser vistas para ser separadas. Pero, naturalmente, la conclusión de Pierre Janet no servía para negar el inconsciente, cuya intervención en tales casos es bien evidente.

Para prescindir por todos los medios de las ideas inconscientes el filósofo Alfred Fouillée recurre a dos explicaciones opuestas: o bien afirma que bajo ciertas condiciones ellas son conscientes, sólo que muy débiles e indiferenciables, o bien, si esta hipótesis no le basta para evitar lo que parece asustarle, se inclina hacia el extremo opuesto, invocando las acciones reflejas, es decir, aquellas acciones cuya existencia ha sido reconocida de manera indudable por los psicólogos al operar, por ejemplo, con ranas decapitadas, lo cual no implica la intervención de los centros mentales, sino únicamente los elementos nerviosos más o menos periféricos e inferiores.

Hay muchos y bien conocidos actos de la mente que no admiten, sin embargo, ni una ni otra de estas dos explicaciones antagónicas. Mencionaremos únicamente la llamada "escritura automática", fenómeno que ha sido bien estudiado en muchos casos de pacientes psíquicos, pero que de ninguna manera es exclusivo de estas personas anormales. Muchos de nosotros, si no todos, hemos experimentado la escritura automática;

por lo menos en mi caso la he experimentado varias veces en mi vida. Una vez, estando en la escuela secundaria y teniendo ante mí un trabajo que me interesaba poco, me dí cuenta repentinamente de que había escrito en una hoja de papel la palabra "Mathématiques". ¿Puede considerarse esto como un movimiento reflejo? ¿Pueden estos movimientos reflejos llegar a consistir en las complicadas operaciones de la escritura a mano?, y ¿es posible que los centros inferiores correspondientes estén enterados de que la palabra "Mathématiques" precisa una "h" después de la "t"? Por otra parte, si yo hubiera tenido conciencia, tan sólo por un instante, de lo que estaba escribiendo, no lo hubiera hecho de ninguna manera, puesto que la hoja de papel estaba destinada a otro objeto completamente diferente.

El caracter múltiple del inconsciente. La existencia del inconsciente parece hoy en día generalmente admitida, si bien algunas escuelas filosóficas insisten todavía en eliminarlo.

En efecto, una multitud de hechos ordinarios demuestran con plena evidencia no sólo la intervención de los fenómenos inconscientes, sino incluso una de sus propiedades más importantes. Consideremos, por ejemplo, el hecho familiar

—lo que no significa que sea simple— de reconocer a una persona por su cara. La identificación de una persona conocida requiere la intervención de no solamente un rasgo característico que se puede mencionar explícitamente (por lo menos si no se está especialmente educado o dotado en dibujo), sino de cientos de ellos. No obstante, todos estos caracteres del rostro de un amigo deben estar presentes en la mente —en la mente inconsciente, desde luego— y todos ellos deben estar presentes en el mismo instante. En consecuencia, vemos que el inconsciente tiene la importante propiedad de ser múltiple, ya que distintas y probablemente muchas cosas pueden y deben ocurrir en él simultáneamente. Esta manera de ser contrasta con la del yo consciente, que es único.

Vemos también que esta multiplicidad del inconsciente le permite realizar una obra de síntesis. En el caso mencionado, los numerosos detalles de una fisonomía imprimen a nuestro consciente una sola sensación, a saber, el reconocimiento de la persona (2).

(2) Entiendo que en la psicología de la Forma (*Gestalt*) contemporánea, hay una sensación única de fisonomía, independiente de las ideas de los diversos detalles. No me considero calificado para discutir esta importante noción; sin embargo, como la cuestión está frecuentemente relacionada con lo que deberemos decir más adelante (especialmente en la Sección VI) debo puntua-

El consciente marginal. No solamente es imposible dudar de la realidad del insconciente, sino que incluso debemos insistir en que apenas hay una operación en nuestra mente que no implique su intervención. A primera vista, las ideas no están nunca en un estado más positivamente consciente que cuando las expresamos al hablar. Sin embargo, cuando pronunciamos una frase, ¿donde está la siguiente? Ciertamente no en el campo del consciente, que está ocupado por la frase primera, y sin embargo, debemos pensar en ella y dejarla lista para aparecer en el instante próximo, lo que no podría ocurrir si no se pensara en ella inconscientemente. En este caso se tra-

lizar que, se admita o no, existe ciertamente algo que corresponde al efecto de luz individual sobre cada punto de nuestra retina (por lo menos en el primer momento, cuando el efecto es transmitido al cerebro) y que estas sensaciones individuales son inconscientes. Este inconsciente —generalmente muy remoto, debido posiblemente a que el mecanismo correspondiente se ha adquirido desde la más temprana infancia— ¿es análogo al que vamos a considerar en las Secciones siguientes? Ésta es otra cuestión; pero debo añadir que esta identidad de naturaleza es difícilmente dudosa para mí: hay una cadena de intermediarios, varios de los cuales han sido descritos por los mismos partidarios de la teoría de la Forma (como veo en la *Psychologie de la Forme* de Paul Guillaume) y sobre todo en aquellos casos como el de aprender a andar en bicicleta (como ha sido observado por muchos autores). Personalmente, habiendo aprendido ya de adulto, no dominé la bicicleta hasta que todo el mecanismo, que empezó siendo consciente, pasó a ser plenamente inconsciente, tan inconsciente que difícilmente podría decir por qué mis movimientos tenían mayor eficacia al final que en los comienzos.

ta de un inconsciente muy superficial, completamente cercano al consciente y a su inmediata disposición.

Parece que podemos identificar este fenómeno con lo que Francis Galton (3) llama la "antecámara" del consciente, bellamente descrita como sigue:

"Cuando me propongo hacer el intento de pensar en algo, el proceso de hacerlo se me aparece como si fuera el siguiente. Las ideas que están en todo momento en mi pleno consciente parecen atraer de mutuo acuerdo la más apropiada de entre un cierto número de otras ideas que están muy cerca, pero fuera del alcance de mi consciente. Parece haber en mi mente una cámara de presencia donde el pleno consciente ofrece audiencia, y donde dos o tres ideas están siempre presentes al mismo tiempo, y una antecámara llena de ideas más o menos relacionadas entre sí que están situadas fuera del alcance del consciente. Fuera de esta antecámara, las ideas más íntimamente vinculadas con las de la cámara de presencia son llamadas automáticamente de manera lógica, asignándoseles un turno de audiencia".

La palabra "subconsciente" puede distinguir-

(3) *Inquiries into Human Faculty,* pág. 203 de la primera edición, 1883 (London, New York: Macmillan); pág. 146 de la edición de 1908 (London, J. M. Dent; New York, E. P. Dutton).

se de "inconsciente" por denotar este proceso inconsciente superficial. Existe, además, la frase muy expresiva de "consciente marginal", introducida por William James, y usada también por Wallas, según me parece, con el mismo sentido ([4]). Estos estados subconscientes son valiosos en psicología por prestarse a la introspección, la cual, por lo menos en general ([5]), no es posible para procesos inconscientes más profundos. Sólo en efecto gracias a estos estados la introspección es posible. Para describirlos, algunos psicólogos, como Wallas, usan una comparación deducida de los actos visuales: "El campo de visión de nuestros ojos consiste en un pequeño círculo de visión plena o "focal", rodeado de un área irregular de visión periférica, en la cual la visión se hace cada vez más vaga e imperfecta hasta desaparecer. En general no nos damos cuenta de la existencia de la visión periférica debido a que tan pronto como algo interesante se presenta en su campo, una fuerte tendencia natural nos hace volver el foco de la visión en su dirección.

([4]) La palabra "anteconsciente", empleada por Varendonck y otros de la escuela de Freud para ciertos estados psíquicos, es de dudosa utilidad en nuestro caso.

([5]) Una excepción la constituye la noche de insomnio de Poincaré (véase pág. 37). Otra excepción posible (aunque menos segura) ocurrió en el caso de un inventor técnico mencionado por Claparède en la reunión del Centro de Síntesis.

Usando estos términos, podemos decir que una razón del porqué tendemos a ignorar los sucesos mentales de nuestro consciente periférico es que existe una fuerte tendencia a llevarlos al foco del consciente tan pronto como ofrecen interés, pero ello no impide que podamos, a veces, mediante un esfuerzo severo, mantenerlos en la perifreia del inconsciente y observarlos en este lugar".

La observación de la distinción entre el consciente y el consciente marginal es en general difícil; sin embargo, esta dificultad es mucho menor en el caso de la invención que nos interesa. La razón de ello es que el trabajo de invención por sí mismo implica que el pensamiento esté inflexiblemente dirigido hacia la solución del problema: una vez obtenida esta última, y solamente entonces, la mente puede percibir lo que tiene lugar en el "consciente marginal", hecho que será de gran interés para nosotros en este estudio.

Capas sucesivas del inconsciente. Vemos que hay por lo menos dos clases —más precisamente, dos grados— de inconsciente.

No cabe dudar, y más adelante lo confirmaremos, que en el inconsciente debe haber sucesivas capas, la más superficial de las cuales es la que acabamos de considerar. Más lejana es la capa

del inconsciente que actúa en la escritura automática; todavía más alejada está la que permite las inspiraciones del tipo mencionado en la Sección precedente. Otra capa todavía más profunda la encontraremos al final de este estudio. Parece existir una especie de continuidad entre el pleno consciente y los niveles más o menos ocultos del inconsciente; sucesión que parece estar especialmente bien descrita en el libro de Taine titulado *De l'Intelligence,* donde escribe [6]:

"La mente de un hombre puede compararse con el escenario de un teatro, muy estrecho cerca de las candilejas, que se ensancha constantemente hacia el fondo. En el frente hay apenas lugar para más de un actor . . . pero cuando uno se aparta más y más de las candilejas, aparecen otras figuras cada vez menos distinguibles. Y mas allá de estos grupos, en los costados y en el techo, existen innumerables formas obscuras que una llamada repentina puede llevar hacia adelante, incluso hasta el proscenio. Constantemente tienen lugar mutaciones indefinidas dentro de este hervidero de actores de todas clases, para ir presentando los directores del coro que van

[6] Añadido por Taine por primera vez en la edición de 1897 (Vol. I, pág. 278).

turnándose y pasando ante nuestros ojos como en una linterna mágica" (7).

Esta notable descripción es completamente análoga a la que menciona San Agustín en el libro X de sus *Confesiones*. Solamente que San Agustín habla de la memoria, pero, según me parece, la analogía es completa por el hecho, para mí indudable, de que la memoria pertenece al dominio del inconsciente.

El inconsciente marginal ofrece evidentemente cierta analogía con las vagas ideas conscientes que Fouillée admite, mientras, en el otro extremo de la cadena, la sucesión de capas inconscientes es muy probable, como establece Spencer (*The Principles of Psychology*, vol. I, Cap. IV), que se una sin solución de continuidad con los fenómenos reflejos. De esta manera, los dos estados que Fouillée necesita oponer al inconsciente no parecen ser otra cosa que los casos extremos del mismo: doble conclusión que, sin

(7) Algunas escuelas psicológicas recientes, como la de Freud, parecería que están en desacuerdó con el punto de vista mencionado y que hablarían únicamente de una sola clase de inconsciente (propiamente dicho). Según me ha informado un competente colega y amigo, esto sería una falsa interpretación del pensamiento de Freud.

Ya hemos visto (Nota 2, pág. 53) que las ideas tienen tendencia a volverse cada vez más inconscientes por influencia del tiempo, circunstancia que encontraremos de nuevo en la Sección VII (pág. 171).

embargo, Fouillée rechaza (*L'Evolutionisme des Idées-Forces,* Introducción, pág. XIV y final de la pág. XIX) mediante argumentos con cuya discusión es inútil cansar al lector.

III. — EL INCONSCIENTE Y EL DESCUBRIMIENTO

Combinaciones de ideas. Las observaciones que acabamos de hacer referentes al inconsciente en general, las analizaremos de nuevo desde el punto de vista de sus relaciones con el descubrimiento.

Veremos más adelante que la posibilidad de atribuir el descubrimiento a la pura casualidad queda excluída con sólo analizar atentamente las observaciones de Poincaré.

Por lo contrario, que existe una cierta intervención de la casualidad junto con un trabajo necesario del inconsciente (este último implicando y no contradiciendo la primera), aparece, como demostró Poincaré, al tener en cuenta no solamente los resultados de la introspección, sino la verdadera naturaleza de la cuestión.

En efecto, es evidente que la invención o descubrimiento, tanto en matemáticas como en cualquier otra ciencia o arte, tiene lugar mediante

la combinación de ideas [1]. Ahora bien, existe un número extraordinario de tales combinaciones, la mayoría de las cuales carecen de interés, y tan sólo un pequeño número de ellas pueden resultar fructíferas. ¿Cuáles son las que percibe nuestra mente? (me refiero a la mente consciente). Únicamente las fructíferas, o bien, excepcionalmente, algunas que podrían ser fructíferas.

Sin embargo, para encontrar combinaciones útiles ha sido necesario construir todas las numerosas combinaciones posibles entre las cuales se encuentran.

No puedo negar que esta primera operación se realiza, hasta cierto grado, al azar, de manera que es difícil poner en duda el papel de la casualidad en este primer paso del proceso mental. Pero vemos que la intervención de la casualidad tiene lugar dentro del inconsciente, pues la mayoría de las combinaciones dichas —más exactamente, todas las inútiles— permanecen desconocidas para nosotros.

Por otra parte, esto prueba el carácter múltiple del inconsciente, que necesita construir todas

(1) Max Müller observa que el verbo latino "cogitare", por "pensar", significa etimológicamente "sacudir conjuntamente". Esto fué ya observado por San Agustín, quien hizo notar también que "intelligere" significa "escoger entre", lo cual se relaciona de manera curiosa con lo que decimos en el texto.

esas numerosas combinaciones y además compararlas unas con otras.

EL PASO SIGUIENTE. Es evidente que este primer proceso, la construcción de todas las combinaciones, es únicamente el principio de la creación; se puede decir, incluso, que es preliminar a ella. Como vimos, y como observa Poincaré, crear consiste precisamente en no hacer combinaciones inútiles y en examinar solamente las útiles, que constituyen una pequeña minoría. La invención es discernimiento, elección.

INVENTAR ES ELEGIR. Esta notable conclusión aparece más sorprendente si la comparamos con lo que escribe Paul Valéry en la *Nouvelle Revue Française*: "En la invención de cualquier cosa toman parte dos entes. El primero hace combinaciones; el segundo elige e inspecciona lo que desea y lo que es de importancia para él dentro de la masa de cosas que el primero le ha preparado. Lo que llamamos genio es mucho menos la obra del primero que la facilidad del segundo para captar el valor de lo que ha sido puesto delante de él y elegir lo más valioso".

Vemos con esto de qué hermosa manera el matemático y el poeta coinciden en la idea fundamental de que inventar es elegir.

La estética en la invención. ¿Cómo puede ser hecha la elección? Las reglas que deben seguirse son "extremadamente sutiles y delicadas". Es casi imposible establecerlas de manera precisa; son más bien sentidas que formuladas. Bajo estas condiciones, ¿cómo es posible imaginar un mecanismo capaz de aplicarlas mecánicamente?

Aunque no veamos directamente funcionar este mecanismo, podemos contestar a la pregunta por conocer los resultados que produce, es decir, por conocer las combinaciones de ideas que son percibidas por nuestra mente consciente. Este resultado está fuera de duda. Los fenómenos inconscientes privilegiados, o sea los susceptibles de hacerse conscientes, son aquellos que, directa o indirectamente afectan más profundamente nuestra sensibilidad emocional.

"Puede ser sorprendente ver invocada la sensibilidad emocional a propósito de demostraciones matemáticas, las cuales parecería que pueden interesar únicamente al intelecto. Esto sería olvidar el sentimiento de belleza matemática, de armonía de los números y de las formas, de la elegancia geométrica, que constituye un verdadero sentido de lo bello, conocido por todos los matemáticos y que con seguridad pertenece a la sensibilidad emocional".

Que el elemento afectivo constituye parte esencial de todo descubrimiento o invención es del todo evidente y ha sido reconocido por muchos pensadores; es claro, efectivamente, que ningún descubrimiento o invención de importancia puede tener lugar sin la *voluntad* de descubrir. Pero, con Poincaré, vemos algo más, vemos que la intervención del sentido de belleza constituye un *medio* indispensable de descubrir. Llegamos, pues, a la doble conclusión:

que la invención es elección,

que esta elección está gobernada imperativamente por el sentido de belleza científica.

VOLVIENDO SOBRE EL INCONSCIENTE. ¿En qué región —no debe tomarse esta palabra en un sentido demasiado literal, sino más bien en un sentido simbólico— en qué región de la mente debe tener lugar la elección mencionada? Con seguridad no en el consciente (2), el cual entre todas las combinaciones posibles conoce únicamente las que son correctas.

Poincaré en un principio supone que el mismo inconsciente percibe también únicamente las

(2) La carta de Mozart (véase pág. 42) sugiere que en su mente la elección era parcialmente consciente, aunque, en nuestra opinión, probablemente precedida de otra preliminar inconsciente; de otra manera caeríamos de nuevo en la hipótesis de la pura casualidad.

combinaciones interesantes, pero luego no insiste en esta hipótesis y, en efecto, no considero que merezca ser examinada con mayor detalle. Al parecer no se trata más que de una primera distinción antes de dar un segundo paso y por consiguiente se reduce a una cuestión de definición; siempre quedaría el problema de buscar la "región" donde son eliminadas las combinaciones sin interés y, por consiguiente, no hay razón para no considerar esta región, si es que existe, como una parte del inconsciente.

Queda por tanto únicamente la conclusión final de Poincaré, a saber, que el inconsciente debe realizar no sólo el trabajo de construir todo el cúmulo de las diversas combinaciones de ideas, sino también el más delicado y esencial de seleccionar aquellas que satisfacen nuestro sentido de belleza y que, en consecuencia, es probable que sean útiles.

OTRAS OPINIONES SOBRE LA INCUBACIÓN. Las razones a priori que acabamos de mencionar, parecerían suficientes para justificar la conclusión de Poincaré. Sin embargo, dicha conclusión ha sido combatida por varios autores, algunos de los cuales ([3]) parecen movidos por el mismo mie-

([3]) Rossman (*Psychology of the Inventor*, VI, pág. 86) escribe: "La hipótesis de que al subconsciente se debe la condición final

do al inconsciente que hemos encontrado en la Sección precedente. Veamos los esfuerzos de estos autores para encontrar la explicación a partir del hecho sorprendente de la iluminación.

No es necesario hablar nuevamente de la doctrina de la pura casualidad, ya discutida en la Sección I y al principio de la presente. Por consiguiente podemos considerar como aceptado que la iluminación está generalmente precedida de un período de incubación (4). En este período de incubación no se percibe conscientemente ningún trabajo de la mente y, por tanto, en lugar de admitir que ello sea un trabajo inconsciente, ¿no podríamos admitir que no ocurre nada ab-

no resuelve el problema. Se trata meramente de dar un nombre a algo que nos confunde y se nos escapa". Ahora bien, los fenómenos inconscientes no son meros nombres sino realidades. Aunque sean difíciles de observar directamente, hemos visto que existen, tanto si son como no la causa de la iluminación. Al invocar "condiciones fisiológicas y químicas del cuerpo" como hace el autor —sin intentar, naturalmente, especificar cuáles son— incurre, por lo menos en igual grado, en el mismo acto de dar simplemente un nombre a nuestra ignorancia. Esta afirmación de Rossman, si algún significado tiene, es únicamente el de dar otro nombre a la hipótesis del descanso.

(4) Parecen ser excepciones el caso de Mozart y, como observa Catherine Patrick en la obra que mencionaremos más adelante (nota 10), el de A. E. Housman. Por la razón dada en el texto, me parece que estas excepciones son aparentes, debido a una rapidez especial de incubación.

solutamente? Dos hipótesis principales han sido emitidas a este respecto ([5]).

A. Se ha supuesto que una explicación para el nuevo estado de la mente que hace posible la iluminación puede residir en cierto desembarazo o falta de fatiga cerebral. Esta es la hipótesis que podemos llamar del *descanso.* Poincaré aunque no la adoptó, pensó en ella en un caso especial (ver más adelante).

B. Puede admitirse también que una causa esencial de la iluminación sea la *ausencia de interferencias,* que dificultan el progreso durante el período preparatorio. "Cuando el que piensa hace una salida falsa, como sucede a menudo, resbala incesantemente hacia un abismo y puede que, por el momento, no sea capaz de salir de él. La incubación consistiría entonces en librarse de falsas orientaciones y de suposiciones erróneas, de manera de aproximarse al problema con una mente despejada". Esta hipótesis puede llamarse *hipótesis del olvido.*

Discusión de estas ideas. En favor de la hipótesis del descanso ha sido invocado el nombre de Helmholtz. Helmholtz decía que las "ideas felices" (palabras que empleaba para indicar la iluminación) nunca se le presentban cuando su

([5]) Véase la *Experimental Psychology* de Woodworth, pág. 823.

mente estaba fatigada, ni cuando estaba sentado en su mesa de trabajo ([6]), y refiriéndose al estudio preparatorio del problema investigado, añade que "entonces, cuando ha desaparecido ya la fatiga producida por este trabajo, debe pasar una hora de completo reposo físico antes de que llegue la idea feliz", afirmación que tal vez tampoco sostiene completamente la hipótesis en cuestión, puesto que no se dice que la iluminación aparezca en el momento en que la mente está descansada, sino una hora después.

Por otra parte el caso de Helmholtz no es universal y hay observaciones en contrario. El profesor K. Friedrichs me escribe que las "ideas creadoras" (si existen) "se presentan la mayoría de las veces repentinamente, con frecuencia después de un gran esfuerzo mental, durante un estado de fatiga mental combinado con relajamiento físico". Una afirmación semejante me

([6]) La cuestión de si los matemáticos acostumbran trabajar de pie o sentados es una de las que fueron preguntadas por la encuesta de *L'Enseignement Mathématique*. Este tipo de hábitos son los que más varían entre los diversos individuos. Parece que Poincaré y Helmholtz acostumbraban estar sentados en su mesa de trabajo, lo que yo no hago nunca excepto si me veo obligado a efectuar cálculos escritos (por los que siento cierta aversión). Excepto de noche cuando no puedo dormir, no encuentro otra cosa mejor que pasear de un lado a otro de la habitación. Me siento identificado con Emile Augier cuando dice: "Las piernas son las ruedas del pensamiento".

ha sido hecha por un crítico de arte, el Dr. Sterling, que debe resolver problemas referentes a la autenticidad de las obras pictóricas. El Dr. Sterling me dice que ha observado que, después de un largo esfuerzo consciente, la inspiración le viene generalmente cuando está fatigado, como si fuera necesario que el consciente estuviera debilitado para que las ideas del inconsciente pudieran filtrarse a su través.

Este ejemplo prueba que las reglas sobre estas cuestiones no son necesariamente inmutables, cosa que deberemos tener siempre en cuenta. Los procesos seguidos pueden diferir no sólo de un individuo a otro, sino incluso para una misma persona. En efecto, las mismas observaciones de Poincaré muestran tres clases de trabajo inventivo, esencialmente diferentes desde nuestro punto de vista, a saber:

a) trabajo completamente consciente,

b) iluminación precedida de incubación,

c) el proceso peculiar de su primera noche de insomnio ([7]).

Además hemos dicho que Poincaré ha pensado en la hipótesis del descanso. Ha pensado en ella

(7) Es de lamentar que Poincaré, al decir que esa noche no fué la única en que pudo observar la acción de su subconsciente, no entrase en mayores particulares. Más detalles hubieran también sido interesantes acerca de la primera noche en cuestión.

(sin inclinarse a adoptarla), vinculándola con un caso particular, distinto al parecer de los tres recién mencionados y que se relaciona estrechamente con la descripción de Helmholtz, o sea, un primero e infructuoso período de trabajo, un descanso, y una nueva media hora de trabajo (Helmholtz habla de una hora), después de la cual la invención aparece. Como Poincaré mismo observa, esto podría explicarse por la hipótesis del descanso, pero se prestaría a las mismas objeciones que en el caso de Helmholtz.

Todavía son posibles otros procesos. Uno muy curioso es el referido por el químico J. Teeple (8), quien, después de una media hora comprobó que había estado trabajando en una cuestión sin darse cuenta de ello y en un estado tal de abstracción mental que en este tiempo olvidó que ya había tomado un baño y estaba tomando otro. Esto constituye un caso especial de proceso inconsciente caracterizado por no tener el individuo conciencia de su trabajo mental mientras lo está realizando, pero dándose cuenta del mismo al terminar.

Vemos, pues, como hay una gran variedad de posibilidades, pudiendo explicarse muchas de ellas por las hipótesis del descanso o del olvido.

(8) Ver Platt y Baker, *Journal Chemical Educ.*, Vol. VIII, 1931, págs. 1969-2002.

Admito de buen grado que una mente "fresca" o despejada —o sea, olvidada de varios intentos infructuosos— puede influir en el descubrimiento cuando el mismo está separado del primer período consciente por un cierto tiempo suficientemente largo, supongamos de algunos meses. En este caso me parece mejor hablar de descubrimiento, no de iluminación, puesto que la solución no aparece de repente e inesperadamente, sino que está dada por un nuevo trabajo.

Además, el olvido podría tal vez, como refiere el profesor Woodworth (9), explicar las iluminaciones que revelan soluciones de una gran simplicidad, debido a que ellas pudieran haber pasado inadvertidas. Pero las demás iluminaciones, en las hipótesis que estamos considerando, requerirían un nuevo esfuerzo de la mente (lo mismo si se considera el descanso que el olvido de las ideas anteriores) para empezar de nuevo con el problema. Tales explicaciones deben, en consecuencia, ser desechadas sin la menor vacilación en aquellos casos de instantaneidad relatados por Poincaré y confirmados por otros autores. Poincaré no estaba meditando en sus problemas cuando subía al ómnibus en Coutances, sino que estaba charlando con un compañe-

(9) Ver la citada página 823 de su *Experimental Psychology.*

ro; la idea cruzó por su mente en menos de un segundo, durante el tiempo preciso en que ponía el pie en el estribo y entraba en el ómnibus. No puede decirse en este caso que la idea fuera tan simple que no exigiera ningún trabajo. El propio Poincaré nos dice que tuvo que desarrollarla y comprobarla a su regreso a Caen. Aunque no con el tiempo tan precisamente delimitado, las otras iluminaciones relatadas por el célebre matemático ocurrieron con la misma instantaneidad y falta de preparación, lo que excluye las explicaciones propuestas.

Además, si se admite cualquiera de ellas, las iluminaciones deben aparecer como resultado de un nuevo trabajo de la misma clase del preliminar, del cual puede diferir únicamente por la eliminación del resultado —que, paradójicamente, es del todo perjudicial, sea fatiga o idea equivocada— de aquel trabajo preliminar. Ahora bien, la observación prueba que el proceso de iluminación *no* es de la misma naturaleza que el trabajo consciente previo. Este último es realmente un trabajo, que implica una tensión más o menos severa de la mente, y con frecuencia múltiples tentativas; el primero, en cambio, aparece repentinamente, sin ningún esfuerzo perceptible.

Por otra parte, si admitiéramos la hipótesis

del olvido, a saber, que varias ideas no apropiadas preceden y obstaculizan por cierto tiempo a la idea verdadera, no hay duda de que deberíamos darnos cuenta de ello, puesto que estas teorías tratan precisamente de excluir todo papel del inconsciente. Por lo contrario, en la mayoría de los casos, en lugar de ver varios caminos en apariencia igualmente buenos para llegar a la solución, lo que ocurre es que no se vislumbra ninguno.

Resumiendo, vemos que las explicaciones basadas en hipótesis como la del descanso o del olvido pueden ser admitidas en algunos casos, pero que en otros ejemplos, especialmente en las iluminaciones típicas de Poincaré y otros, ellas son contradichas por los hechos ([10]).

([10]) Catherine Patrick (*Archives of Psychology*, Vol. 26, 1935, N. 178) ha llevado a cabo un estudio experimental de la invención poética. Propuso a varias personas —poetas profesionales algunas y otras no— escribir un poema sugerido por un cuadro que les era mostrado. Contrariamente a su opinión, no puedo considerar que el proceso así observado sea comparable al nuestro. El tiempo del experimento —poco más de veinte minutos— prueba que se trata de una cuestión completamente diferente, y lo que ella llama incubación, en que las personas son invitadas a relatar en alta voz el curso de sus pensamientos durante su intento de realizar el trabajo propuesto, no tiene nada que ver con la incubación considerada por Helmholtz y Poincaré, en la cual el curso del pensamiento, por lo menos en lo referente a la investigación, permanece totalmente desconocido al interesado.

OTRAS OPINIONES SOBRE LA ILUMINACIÓN. LA ETAPA DE INTIMACIÓN. Otra objeción menos esencial y de otra índole ha sido hecha a las descripciones de Helmholtz y Poincaré sobre el fenómeno de la iluminación ([11]). ¿No ocurrirá que parte de este fenómeno tenga lugar en lo que antes hemos llamado el consciente marginal?

Ahora bien, el consciente marginal y el consciente mismo están tan relacionados y los cambios entre sí son tan continuados y rápidos, que parece difícil imaginar cómo pueden dividir su papel en el repentino e instantáneo fenómeno de la iluminación. Sin embargo, como consecuencia de lo que veremos en la Sección IV, este punto de vista no puede dejar de ser considerado.

Otra circunstancia más curiosa ha sido también observada. Para algunos pensadores, mientras están trabajando en un problema, la iluminación puede ser precedida por una especie de sensación que les advierte de que algo de aquella naturaleza es inminente, sin poder saber exactamente lo que será. Wallas ha dado a este curioso fenómeno el nombre de "intimación". Nunca experimenté esta sensación y Poincaré tampoco habla de ella, lo que habría hecho seguramente si la hubiera experimentado. Sería útil realizar

([11]) Graham Wallas, *The Art of Thought,* pág. 96.

una encuesta entre científicos acerca de este particular.

Una última objeción a las ideas de Poincaré ha sido formulada por Wallas. Admite este autor que Poincaré puede tener razón al decir que "sin un grado bastante elevado de instinto estético, nadie será nunca un gran descubridor en matemáticas", pero añade que "es extremadamente improbable que el instinto estético por sí solo sea la "potencia" que mueve la "máquina" del pensamiento".

Sin embargo, no reproduciré textualmente el pasaje de Wallas por ser a mi juicio difícilmente comprensible. Me parece que descansa sobre una confusión evidente entre dos conceptos que deben ser claramente distinguidos ([12]): el "movimiento" (o sea "qué hacer") y el "mecanismo" (o "cómo hacerlo") ([13]). En la Sección IX hablaremos del "movimiento" y veremos de nuevo cómo la potencia motriz está constituída por el sentido de lo bello. Por el momento nos ocuparemos del mecanismo, respecto a cuya naturaleza puedo difícilmente dudar. Wallas sospecha a este respecto de Poincaré tanto porque era amigo

([12]) Véase la *Dynamic Psychology* de Woodworth.

([13]) Me veo obligado a utilizar casi simultáneamente las dos palabras "mecanismo" y (ver más adelante) "mecanista", cuyo significado es completamente diferente. Espero que ello no sea motivo de confusión para el lector.

de Boutroux, el cual a su vez era amigo de William James, como por estar influído por las ideas de la escuela "mecanicista". Las ideas de Poincaré, no solamente son el resultado de sus propias observaciones y no las sugestiones de otros, sino que personalmente concuerdo exactamente con ellas, no por haber sido amigo de Boutroux o de William James, ni por haber estudiado (que no lo he hecho), la escuela mecanicista, ni por ninguna otra cosa, sino como consecuencia de mi propia observación, porque las ideas escogidas por mi inconsciente son las que adquiere mi consciente y veo que, precisamente, ellas son las que concuerdan con mi sentimiento estético.

Me parece indudable que todo matemático, si no todo científico, estará de acuerdo con esta opinión. Puedo añadir que actualmente muchos de ellos, al escribirme sobre el motivo del presente trabajo, se expresan de manera espontánea (es decir, sin ninguna pregunta mía acerca de este punto especial) y de la manera más concluyente, en el mismo sentido.

OTRAS TEORÍAS SOBRE EL INCONSCIENTE. Es cierto que las conclusiones anteriores son, hasta cierto punto, sorprendentes. Ellas plantearon a Poincaré una cuestión desconcertante. El incons-

ciente se considera generalmente como automático, y en cierto sentido lo es indudablemente puesto que no está sujeto a nuestra voluntad o por lo menos no depende directamente de ella, y hasta es independiente de nuestro conocimiento. Pero, por otra parte, el mismo inconsciente "no es puramente automático; es capaz de discernimiento; tiene tacto, delicadeza; sabe elegir y adivinar. Sabe adivinar incluso mejor que el mismo consciente, puesto que consigue triunfar donde este último ha fracasado. En una palabra, ¿no es un elemento superior al mismo consciente?" ([14]).

Esta idea ha estado en boga entre ciertos metafísicos recientes y aun de tiempos pasados. El hecho cierto de que el inconsciente, a pesar de manifestarse de vez en cuando, no es en realidad desconocido, le ha dado un carácter misterioso, por lo cual se le ha considerado a menudo relacionado con poderes superiores ([15]). Parece que ya Aristóteles admitía que el inconsciente puede ser algo no dependiente exclusivamente del in-

([14]) Poincaré se refiere aquí a Emile Boutroux, cuya influencia sobre él evidentemente existe en este caso.

([15]) Casos semejantes ocurren en lo referente a los sueños, a los cuales, desde que el mundo existe se les ha atribuído una especie de valor profético. Pero sería demasiado irrespetuoso comparar teorías metafísicas del inconsciente con los libros populares que contienen la "Clave de los sueños".

dividuo, admitiendo la participación divina. Según la opinión de Leibniz, el inconsciente pone al hombre en comunicación con el universo en su totalidad, en el cual nada puede ocurrir sin que repercuta en cada uno de nosotros. Algo análogo se encuentra en Schelling. Fichte invoca de nuevo la participación divina, etc.

Incluso en época más reciente se ha fundado sobre dicho principio un teoría filosófica completa, en primer lugar por Myers, después por el mismo William James (a pesar de que este gran filósofo, en su obra anterior *Principles of Psychology* se expresaba, a veces, como poniendo en duda la verdadera existencia del inconsciente). De acuerdo con esta doctrina, el inconsciente pondría al hombre en comunicación con un mundo distinto del accesible por los sentidos y con cierta clase de seres espirituales.

Para otros autores el inconsciente aparece como vestigio de existencia anteriores, mientras que otros sugieren la posibilidad de que sea debido a la acción de espíritus incorpóreos.

Puesto que han sido admitidas cuasas celestiales, no debe extrañarnos que sean también invocadas causas infernales, como ha sucedido recientemente. Un filósofo audaz, el alemán Hartmann, considera el inconsciente como una fuerza universal, de carácter diabólico, que in-

fluye sobre las cosas y seres de manera siempre perjudicial. Ello es la consecuencia del pesimismo engendrado en él por el miedo al terrible inconsciente que le instiga constantemente al suicidio, no individual, que considera insuficiente, sino al "suicidio cósmico", imaginando que poderosas fuerzas de destrucción serán proyectadas por la humanidad, capaces de destruir de una vez todo el planeta: una especie de predicción de lo que está teniendo lugar en el momento de escribir estas líneas.

Hemos visto como varios autores tienen una especie de temor ante el inconsciente y se resisten a admitir su verdadera existencia. Tal vez esta resistencia sea una especie de reacción contra los vuelos excesivos de la imaginación que otros autores se han permitido. El mismo carácter misterioso que se le ha atribuído parece haber repelido a unos y sobreexcitado a otros.

La cuestión está en ver si se trata de un misterio o, más exactamente, de un misterio sui géneris. El verdadero misterio está en la existencia de cualquier pensamiento o de cualquier proceso mental, procesos conexos —de manera acerca de la cual apenas conocemos nada más de lo que conocía la humanidad hace miles de años— con el funcionamiento de algunas de las células cerebrales. La existencia de varias clases

de tales procesos no es más misteriosa que la existencia de una sola clase de ellos.

Respecto a si la mente inconsciente es "superior" o "inferior" a la consciente, es una cuestión que carece de sentido, pues en general ninguna cuestión de "superioridad" o "inferioridad" tiene carácter científico. Cuando se cabalga, ¿es el caballo superior o inferior al jinete? Es más fuerte y puede correr más rápidamente que el jinete, pero sin embargo éste puede dirigir el caballo a su albedrío. No comprendo qué sentido tendría decir que el oxígeno es superior o inferior al hidrógeno, ni que la pierna derecha es superior o inferior a la izquierda: las dos cooperan en el andar. Éste es precisamente el caso del consciente y el inconsciente: los dos cooperan entre sí de la manera que vamos a considerar a continuación.

IV. – LA ETAPA PREPARATORIA. LÓGICA Y CASUALIDAD

El trabajo consciente. Analizando la conferencia de Poincaré, el crítico literario Emile Faguet escribió: "La solución de un problema... se revela por sí misma repentinamente cuando ya no se trabaja más en ella, probablemente por el mismo hecho de no trabajar más en ella y precisamente cuando uno espera descansar y reposar por un cierto tiempo: hecho que probaría —y es de temer que los perezosos abusen de ello— que el descanso es la condición del trabajo".

Sería desde luego muy cómodo si al sernos planteado un problema pudiéramos, simplemente, pensar en lo bonito que sería resolverlo, ir luego a la cama y encontrar lista la solución al despertar a la mañana siguiente. Evidentemente, desde el punto de vista moral, esto sería tal vez demasiado cómodo.

La experiencia prueba, sin embargo, que las

cosas no ocurren exactamente de esta manera. En primer lugar, sucede a menudo que, por lo menos en varias de sus partes, el trabajo de investigación es perfectamente consciente (1). Así ocurrió en varias etapas de la obra de Poincaré, según ya vimos al principio; por ejemplo, en el período que sigue inmediatamente al inicial.

Desde este punto de vista es muy típico el ejemplo del descubrimiento de la atracción universal por Newton. Se cuenta que al preguntársele cómo había llegado a esta idea contestó: "Pensando constantemente en ella". No hace falta, por otra parte, basarse en esta anécdota, que puede no ser auténtica, para comprender que, efectivamente, dicho descubrimiento fué un trabajo de elevada e inflexible lógica, puesto que la idea principal y esencial, o sea, que la Luna debería caer sobre la Tierra, no es más que una consecuencia inevitable del hecho de que esto ocurre para todo cuerpo material (sea o no una manzana). Bastó entonces una continua

(1) Sin embargo, la palabra "consciente" no debe tal vez ser entendida en sentido tan estricto. Un análisis más atento nos mostrará (véase la Sección VI) que existe una cooperación entre el verdadero consciente y el consciente superficial o consciente marginal del que hablamos en la Sección II.

y tenaz atención, "una consentida y voluntaria fidelidad a una idea" (2).

¿Debemos, por consiguiente, coincidir con la tesis de Buffon de que el genio a menudo no es más que el fruto de una larga paciencia? Evidentemente esta idea es contraria a todo lo que hemos dicho hasta aquí; confieso que no puedo compartirla ni aprobarla. En el caso de Newton, se puede ciertamente ver desde un principio una línea continua de pensamiento dirigida constantemente hacia un objetivo determinado. Pero este proceso partió del reconocimiento inicial de que el asunto merecía esta continuidad de atención, esta consentida y voluntaria fidelidad de que acabamos de hablar. Esto es de nuevo una inspiración, una elección; sólo que ella tiene lugar en la voluntad consciente.

EL TRABAJO CONSCIENTE COMO PREPARATORIO. Consideremos ahora el caso opuesto de las inspiraciones inesperadas que repetidamente iluminaban la mente de Poincaré. Hemos llegado a la conclusión de que eran la consecuencia de un prolongado trabajo inconsciente más o menos intenso. Pero, este trabajo inconsciente ¿es por sí mismo un efecto sin causa? Estaríamos en un completo error pensando así; basta volver a la

(2) Delacroix, *L'Invention et le Génie*.

misma relación de Poincaré para llegar a la conclusión contraria. Su primera inspiración, en el momento de subir al ómnibus en Coutances, aparece después de un período preliminar de trabajo deliberado; después de esto lo vemos estudiando cuestiones aritméticas "aparentemente sin mucho éxito" y, finalmente, "disgustado por su fracaso", después de lo cual se le revelan nuevos y fecundos progresos. Aborda a continuación en forma sistemática el problema principal pendiente "venciendo las dificultades una tras otra. Quedaba una, sin embargo, que se resistía y cuya solución hubiera significado la de todo el problema. Pero todos mis esfuerzos servían únicamente para mostrarme mejor la dificultad, lo cual ya era algo". Y de nuevo expresa que todo este trabajo era perfectamente consciente.

Solamente entonces, y después de dejar la cuestión a un lado por un tiempo, la solución de la dificultad se le aparece repentinamente.

En todos estos pasos sucesivos, como vemos, "las inspiraciones repentinas (y los ejemplos citados lo prueban suficientemente) nunca tienen lugar sino después de algunos días de esfuerzo voluntario, aparentemente infructuoso y cuando parece que nada bueno puede esperarse, puesto que el camino seguido da la impresión de ser totalmente equivocado. Estos esfuerzos,

por tanto, no han sido tan estériles como pudiera creerse. Han servido para poner en marcha la máquina del inconsciente, que sin ellos no se hubiera movido ni hubiera producido nada".

Análogamente, Helmholtz ha observado que lo que hemos llamado incubación e iluminación debe estar precedido por esta etapa de *preparación*. Después de Helmholtz y Poincaré, su existencia ha sido reconocida por los psicólogos como un hecho general que probablemente existe aun en casos no tan aparentes, como en el de Mozart, que tampoco menciona la incubación.

No será inútil advertir que independientemente de las razones dadas, lo que acabamos de discutir es por sí mismo suficiente para aclarar la cuestión de si el descubrimiento es una acción de pura casualidad. El descubrimiento no puede ser producido únicamente por suerte o casualidad. El descubrimiento no puede ser producido únicamente por suerte o casualidad, aunque ella desempeñe un cierto papel, de la misma manera que la influencia de la casualidad en artillería no dispensa al artillero de apuntar ni de afinar con la mayor precisión la puntería. El descubrimiento depende necesariamente de una acción preliminar, más o menos intensa, del consciente.

Esta observación no solamente aclara la cuestión de la hipótesis de la casualidad, sino que

al mismo tiempo previene contra la admisión de otras hipótesis como las que hemos examinado en la Sección precedente. Debemos, en efecto, advertir que las hipótesis del descanso y del olvido tienen una característica común, a saber: para ellas el trabajo preparatorio, caso de no conseguir por sí mismo la solución, es considerado como inútil e incluso contraproducente. Por consiguiente, el descubrimiento hubiera tenido lugar lo mismo sin el trabajo preparatorio, lo que lleva consigo la inadmisible hipótesis de la pura casualidad.

Opinión de Poincaré sobre el funcionamiento del trabajo preparatorio. Sentado lo que precede, no se puede seguir suponiendo al consciente como subordinado al inconsciente. Por lo contrario, pone en marcha su acción y define, en mayor o menor grado, la dirección general según la cual el inconsciente debe trabajar.

Para ilustrar esta acción directora, Poincaré utiliza una feliz comparación, notablemente fecunda. Imagina que las ideas que constituyen los futuros elementos de nuestras combinaciones, son "algo como los entrelazados átomos de Epicuro. Durante el reposo completo de la mente, estos átomos permanecen inmóviles, estando, por decirlo así, pegados a la pared; de esta ma-

nera el reposo completo puede prolongarse indefinidamente sin que los átomos se encuentren y, en consecuencia, sin que se produzca ninguna combinación entre ellos".El acto de estudiar una cuestión consiste en movilizar ideas, no precisamente todas, sino aquellas de las cuales se puede esperar razonablemente la solución deseada. Puede suceder que este trabajo no produzca inmediatamente el resultado; "creemos, entonces, no haber procedido bien, pues hemos movido estos elementos de mil maneras diferentes intentando ordenarlos convenientemente y no hemos encontrado ninguna ordenación satisfactoria". Pero, según parece deducirse de la experiencia, estos átomos han quedado libres y, como si se tratara de proyectiles, siguen moviéndose en varias direcciones a través del espacio. "Después de esta sacudida impuesta a ellos por nuestra voluntad, los átomos no vuelven a su primitiva posición de reposo: continúan libremente su danza".

Las consecuencias que de aquí se deducen son fáciles de prever: "Los átomos movilizados chocan unos con otros, originando combinaciones entre sí o entre otros átomos todavía inmóviles que encuentran en su camino". En estas nuevas combinaciones, resultado indirecto del trabajo

consciente original, residen las posibilidades de la inspiración aparentemente espontánea.

LÓGICA Y CASUALIDAD. Aunque la comparación anterior fué presentada por Poincaré simplemente como un símil grosero, ella ha resultado sumamente instructiva.

Vamos a ver, en efecto, cómo prosiguiendo con dicha analogía pueden ser aclarados otros puntos. Consideremos, de acuerdo con este criterio, la cuestión de la lógica y la casualidad en el descubrimiento, sobre la cual los autores presentan la máxima disparidad de opinión. Muchos de ellos, aunque no hasta el extremo que hemos visto en Nicolle, insisten en la importancia de la casualidad, al paso que otros subrayan la preeminencia de la lógica. Entre los psicólogos que citamos al principio, Paulhan pertenece a esta última escuela, mientras que Souriau representa la primera. Me parece, de acuerdo con mi introspección personal, que se puede llegar a una buena comprensión del problema utilizando la comparación de los átomos en movimiento de Poincaré, comparación que voy a completar asimilando el mecanismo de la puesta en marcha de estos átomos con el disparo de un cartucho de caza. Es bien conocido que un buen cartucho de caza es aquel en que la munición

se esparce en su justa medida; si este esparcimiento es demasiado ancho, no sirve para apuntar bien y si es demasiado estrecho el tiro es excesivamente rectilíneo. Las circunstancias en nuestro caso son completamente análogas. Comparando de nuevo la idea de los átomos de Poincaré, puede suceder que la mente los proyecte exactamente, o casi exactamente, según ciertas y determinadas direcciones. Con esto se tiene la ventaja de que la proporción de encuentros útiles entre ellos resulta relativamente grande comparada con la de encuentros estériles; pero, por otra parte, hay el peligro de que estos encuentros sean insuficientemente diferentes unos de otros. Por el contrario, puede suceder que los átomos sean proyectados de manera completamente desordenada en todas direcciones. En tal caso la mayoría de los encuentros carecerán de interés, pero, por otra parte, como en una especie de lotería, este desorden puede ser altamente valioso, pues si los pocos encuentros útiles son de naturaleza excepcional y ocasionados por ideas aparentemente muy remotas, de otra manera no se hubieran podido producir.

Es lo que expresa Souriau mediante una frase notable: "Para inventar, se debe pensar de lado" ([8]) e, incluso en matemáticas, —si bien en

([8]) "Pour inventer, il faut penser à côté."

este terreno su significado es algo diferente del que tiene en las ciencias experimentales— podemos recordar la afirmación de Claude Bernard: "Quienes tienen una excesiva fe en sus ideas, no están capacitados para hacer descubrimientos".

ERRORES Y FRACASOS. La razón de la diferencia entre el significado de la frase de Claude Bernard en matemáticas y en las ciencias experimentales consiste en que, en estas últimas, la pertinaz persecución de una idea preconcebida puede conducir a error, es decir, a conclusiones falsas.

Por el contrario, en nuestro campo, no es posible insistir sobre los errores. Los buenos matemáticos, cuando los cometen, lo que no es poco frecuente, se percatan pronto de ellos y los corrigen. Incluso puedo decir de mí, y lo mismo ocurre a otros muchos matemáticos, que cometo más errores que mis alumnos; sólo que siempre me doy cuenta de ellos y los corrijo, no quedando huella en el resultado final. La razón de esto es que en cuanto he cometido un error, un presentimiento —la misma sensibilidad científica de la que hablamos anteriormente— me advierte que mis cálculos no se presentan como debieran.

Existen, sin embargo, notables excepciones referentes a puntos delicados de razonamientos;

en estos casos los errores pueden resultar más fecundos que los resultados exactos, como sucedió con la prueba insuficiente dada por Riemann del "principio de Dirichlet".

Pero, en ambos campos, el matemático y el experimental, el hecho de no pensar suficientemente "de lado" es muchas veces motivo de fracaso —por ejemplo, puede motivar la falta de éxito en encontrar una solución que puede luego aparecer inmediatamente a pensadores más inspirados— circunstancia que para la psicología es por lo menos tan interesante como el mismo descubrimiento.

Esto explica, en especial, los fracasos que podríamos llamar "paradójicos", por ejemplo, el fracaso de un investigador para darse cuenta de una importante consecuencia que sigue inmediatamente de sus propias conclusiones.

Por supuesto hay que aclarar bien lo que entendemos por consecuencia *inmediata.* Cuando el descubridor de un cierto hecho se entera de que otro investigador ha encontrado una consecuencia del mismo, si este progreso ha requerido cierto esfuerzo, el primero debe considerarlo no como un fracaso, sino más bien como un éxito, y tiene pleno derecho a reclamar su parte en el nuevo descubrimiento.

Fracasos paradójicos del tipo mencionado han

sido señalados por Claparède en la sesión ya mencionada y deben, en mi opinión, ser explicados tal como lo hemos hecho. El ejemplo más notable que indica Claparède se refiere a la invención del oftalmoscopio. El fisiólogo Brücke había estudiado los medios de iluminar la parte obscura del ojo, llegando a conseguirlo; pero fué Helmholtz quien, mientras preparaba una clase sobre el resultado de Brücke, concibió la idea de que los rayos reflejados por la retina podrían utilizarse para engendrar imágenes ópticas, idea casi trivial y que parece difícil concebir cómo pudo escaparse a Brücke. En este caso es evidente —al menos para mí— que la mente de Brücke estaba dirigida demasiado estrechamente hacia su problema concreto.

Análogamente, también según refiere Claparède, de la Rive fracasó en el invento del método galvanoplástico y a Freud se le escapó la aplicación de la cocaína en la cirugía ocular.

EJEMPLOS PERSONALES. Todo científico puede probablemente relatar fracasos semejantes. En mi caso particular me ha sucedido muchas veces el hecho de pasarme inadvertidos resultados que a ciegas deberían haberme llamado la atención, por tratarse de consecuencias inmediatas de otros ya obtenidos. La mayoría de estos

fracasos proceden de la causa que acabamos de mencionar, es decir, de mantener la atención dirigida demasiado estrechamente hacia un objetivo prefijado.

El primer ejemplo que recuerdo en mi vida se refiere a una fórmula que obtuve muy en los comienzos de mis trabajos de investigación. Había decidido no publicarla y esperar hasta que pudiera deducir algunas consecuencias importantes de la misma. En aquel tiempo todo mi pensamiento, como el de muchos otros analistas, estaba concentrado sobre una cuestión, la demostración del célebre "Teorema de Picard". Ahora bien, mi fórmula daba inmediatamente uno de los principales resultados que encontré cuatro años más tarde por un camino mucho más complicado, de lo cual sin embargo no me dí cuenta hasta transcurridos algunos años más, cuando Jensen publicó la misma fórmula y dedujo, como una consecuencia inmediata, esos resultados que felizmente para mi propia estima, había obtenido en el intervalo. Es evidente que, en 1888, había estado pensando de manera demasiado exclusiva en el teorema de Picard.

Mi próximo trabajo fué mi tesis de doctorado. Dos importantes teoremas referentes a la materia [4] eran tan evidentes e inmediatas consecuen-

[4] Para los técnicos: "Si los coeficientes de una serie de Mac

cias de las ideas contenidas en ella que, años más tarde, otros autores me los atribuyeron, debiendo sin embargo confesar que, a pesar de su evidencia, me habían pasado inadvertidos.

Algunos años más tarde me encontraba interesado en generalizar a los hiperespacios la clásica noción de curvatura de superficies. Tenía mi mente concentrada en la noción de curvatura de Riemann de los hiperespacios, la cual es una generalización de la noción elemental de curvatura de una superficie del espacio ordinario. Lo que me interesaba era obtener la curvatura de Riemann como curvatura de una cierta superficie *S* contenida en el hiperespacio considerado y de forma elegida convenientemente de manera que la curvatura resultase mínima. Logré probar que el mínimo así obtenido coincidía con la expresión de Riemann. Sin embargo olvidé tomar en consideración las circunstancias bajo las cuales dicho mínimo es alcanzado, es decir, el verdadero camino para construir S de manera que satisfaga la condición de mínimo. Ahora bien, este estudio me habría conducido al llamado "Cálculo diferencial absoluto", cuyo descu-

Laurin son números reales y positivos, y siendo el radio de convergencia igual a R, el punto $x = R$ es un punto singular"; "Una serie de MacLaurin con radio de convergencia finito admite generalmente su círculo entero de convergencia como línea singular esencial".

brimiento fué hecho más tarde por Ricci y Levi-Civita.

El cálculo diferencial absoluto está íntimamente relacionado con la teoría de la relatividad y a este respecto debo confesar que habiendo observado que la ecuación de la propagación de la luz es invariante respecto de un cierto conjunto de transformaciones (conocido ahora por el grupo de Lorentz) en las cuales el espacio y el tiempo aparecen combinados entre sí, dije que "tales transformaciones carecen, evidentemente, de sentido físico". Sin embargo, estas transformaciones que supuse sin sentido físico fueron la base de la teoría de Einstein.

Continuando sobre mis fracasos, debo mencionar otro que lamento particularmente. Se refiere al famoso problema de Dirichlet que por varios años intenté resolver siguiendo la misma dirección inicial de Fredholm, es decir, reduciéndolo a un sistema de infinitas ecuaciones de primer grado con infinitas incógnitas. Sin embargo, la interpretación física, que en general es una guía muy segura y lo ha sido muchas veces para mí, en este caso me engañó. Esta interpretación sugería acometer el problema mediante un "potencial de capa simple" —que en esta cuestión conducía a un callejón sin salida— mientras que la solución debía buscarse por la introducción

de un "potencial de capa doble". Esto prueba cuán justificada está la mencionada frase de Claude Bernard y como uno no debe seguir demasiado tenazmente un principio determinado, por justificable y fecundo que resulte en general.

En todos estos ejemplos, como vemos, la razón del fracaso es siempre fundamentalmente la misma. El caso opuesto me ocurrió cuando me pasó inadvertido el hecho de que un problema en la "geometría de la inversión" puede ser indeterminado, hecho que conduce a las hermosas propiedades descubiertas por André Bloch. En este caso no se trata de haber seguido estrictamente mi dirección inicial, que me hubiera conducido precisamente a discutir con más detalle el problema que había ya resuelto y, en consecuencia, a darme cuenta de la posibilidad de indeterminación. Este caso es precisamente el contrario de los precedentes: no fuí lo suficientemente fiel a mi idea principal.

Debo terminar la enumeración de estos fracasos con uno que siempre me ha sido difícil de explicar. Habiendo encontrado, para construir las condiciones de posibilidad para un problema de ecuaciones en derivadas parciales ([5]), un mé-

([5]) Para técnicos: Véase las págs. 257-360 de mis *Lectures on Cauchy's Problem* dadas en Yale; págs. 351-355 de la edición francesa. La solución mejorada está dada en los *Methoden der Ma-*

todo que daba el resultado en una forma muy compleja e intrincada, ¿cómo no llegué a observar en mis propios cálculos una analogía que aclaraba todo el problema y dejé este descubrimiento para otros sucesores más afortunados y mejor inspirados? He aquí lo que es para mí difícil de concebir.

EL CASO DE PASCAL. Es muy posible que muchos científicos, si no todos, puedan recordar experiencias personales similares. Reconforta el pensar que lo mismo parece haber sucedido a alguno de los más grandes hombres.

En su *Art de Persuader,* Pascal enuncia un principio que es fundamental, como método, no sólo en matemáticas sino en toda disciplina deductiva o en toda materia basada en el razonamiento, a saber:

"Se deben sustituir las definiciones en lugar de lo definido".

Por otra parte, en otro lugar, observa el hecho evidente de que, por la misma razón de que no es posible demostrarlo todo, es también imposible definirlo todo. Existen ideas primitivas que no es posible definir.

Si Pascal hubiese pensado en yuxtaponer es-

thematischen Physik (págs. 425-430) de Hilbert-Courant, siguiendo unos trabajos de John y Asgueiersson.

tas dos afirmaciones, se habría encontrado ante un grave problema de lógica, el cual no sólo nos permite entender el verdadero significado del célebre postulado de Euclides, sino que, más generalmente, el mismo problema produjo más tarde una profunda revolución en el campo de la lógica que, como vemos, podría haber tenido lugar tres siglos antes.

Sin embargo, Pascal no relacionó ambas ideas. Si la razón de ello fué que sus pensamientos estaban dirigidos con excesiva intensidad hacia consecuencias teológicas, como un amigo me sugiere, es una cuestión difícil de dilucidar.

INTENTOS PARA GOBERNAR NUESTRO INCONSCIENTE. Los ejemplos anteriores prueban que, en la investigación, puede ser perjudicial disipar excesivamente nuestra atención, pero dirigirla demasiado estrechamente hacia una dirección particular puede también ser inconveniente para el descubrimiento.

¿Qué debe hacerse para evitar estos inconvenientes opuestos?

Desde luego existe la influencia evidente de la dirección hacia la cual enfocamos nuestro trabajo preparatorio que da el impulso al trabajo inconsciente y, en efecto, sobre todo si se tiene en cuenta la concepción de Poincaré, esto puede

darnos un medio para educar nuestro inconsciente. La fórmula de Soriau "Para inventar se debe pensar de lado", debe entenderse en este sentido.

Sin embargo, esto no es todavía completamente satisfactorio: de esta manera pensaremos "de lado" hacia direcciones previstas, pero quedan todas las imprevistas que a veces son las más interesantes. Debemos observar, en este sentido, que para quien desee descubrir es importante no limitarse a un capítulo de la ciencia, sino mantener el contacto con otros varios.

¿Pueden encontrarse otros medios para influir sobre nuestro inconsciente? Esto sería de gran importancia, no solamente en lo que respecta a la invención, sino incluso para la conducta misma ante la vida y, especialmente, para la educación. El estudio de esta cuestión, digno de ser proseguido, ha sido emprendido por lo menos en una revista, *La Psychologie et la Vie,* un fascículo entero de la cual fué dedicado en 1932 a esta cuestión, con contribuciones de varios autores. Particularmente Dwelshauvers sugiere un análisis de las condiciones del fenómeno, como la hora del día en que tiene lugar, cuánto tiempo transcurre entre la preparación voluntaria y la solución, si esta incubación dura horas o días, si

su duración es proporcional a la dificultad del problema, etc.

En espera de los resultados de tales estudios, una regla resulta evidentemente útil, a saber: Después de trabajar sobre una cuestión hasta que ya no parezca posible progresar más, dejarla e intentar cualquier otra cosa de manera provisional, con el propósito de volver a la cuestión primitiva después de un intervalo de algunos meses. Éste es un consejo muy útil para todo estudiante que empieza trabajos de investigación.

Existe otra dirección según la cual puede intentarse la educación del inconsciente, pero no puedo arriesgarme a hablar de ella. Me refiero a los poderosos medios que, como me ha sido sugerido por el doctor de Saussure, pueden proporcionar los métodos del psicoanálisis.

V. — EL TRABAJO CONSCIENTE POSTERIOR

LA CUARTA ETAPA. Hasta ahora nos hemos ocupado de las tres etapas que Helmholtz y Poincaré distinguieron en los procesos de invención, a saber: preparación, incubación e iluminación. Poincaré, además, prueba la necesidad e importancia de una cuarta y última etapa, que de nuevo tiene lugar en el consciente. Esta nueva intervención del consciente, después de la actuación del inconsciente, es indispensable no solamente por la evidente necesidad de expresar los resultados en palabras o por escrito, sino también, por lo menos, por otras tres razones, las cuales, sin embargo, son estrechamente dependientes entre sí:

1) *Verificar los resultados.* El sentimiento de absoluta certeza que acompaña a la inspiración corresponde generalmente a la realidad, pero puede suceder que alguna vez resulte equivo-

cado [1]. De aquí la necesidad de que sea verificado por el razonamiento, tarea que pertenece a nuestro consciente.

2) *"Precisar" los resultados.* Es decir, enunciarlos con precisión. Como observa Poincaré, nunca sucede que el trabajo inconsciente suministre el resultado de un cálculo relativamente largo completamente resuelto. Si la cualidad de "automático" atribuída al inconsciente se tomase al pie de la letra, debería suponerse que, pensando en una cuestión algebraica antes de ir a dormir, se podría esperar que el resultado se encontrase listo en el momento de despertar. Sin embargo, nada de esto sucede, debido a que el automatismo del inconsciente no se manifiesta de esta manera. Por el contrario, los cálculos efectivos, que requieren disciplina, atención, voluntad y por tanto, conciencia, dependen del segundo período de trabajo consciente que sigue a la inspiración.

Por consiguiente llegamos a la conclusión, en apariencia paradójica —a la cual, por otra parte, deberemos introducir una corrección como ya hicimos en el caso de Newton— de que esta intervención de la voluntad, es decir, de una de

(1) Poincaré relata que esto le sucedía a él especialmente con relación a las ideas que se le presentaban por la noche o por la madrugada, o estando en la cama en un estado semihipnagógico.

las más elevadas facultades del alma, ocurre en una etapa completamente mecánica del trabajo, estando en cierta manera subordinada al inconsciente, aunque tiene bajo su control al mismo. Esta segunda operación es inseparable de la primera, la verificación. La mente consciente las realiza simultáneamente.

Una afirmación de Paul Valéry. Lo que acabamos de encontrar en el dominio de la investigación matemática, especialmente la coordinación del trabajo de "precisión" con la inspiración original, está nuevamente de acuerdo con lo que dice Paul Valéry acerca de otra clase completamente distinta de invención, excepto en que la exacta descripción de Valéry sugiere que los hechos pueden ser todavía más complejos y delicados de lo que él mismo o Poincaré suponen, y merecerían por tanto un estudio más profundo. Valéry dice, en el párrafo (2) cuyo comienzo ya hemos citado (Sección I, pág. 43):

"Existe el período del cuarto obscuro. No debe haber excesivo fervor en este momento, bajo peligro de estropear el plato. Ustedes deben tener sus reactivos, deben trabajar como su propio patrón, como su propio jefe. El señor ha suministrado la chispa; es ahora su deber hacer

(2) *Bulletin Soc. Philosophie,* Vol. 28, 1928, pág. 16.

algo con ella. Es muy curioso el contratiempo que a veces puede producirse. Hay resplandores de luz engañosos y cuando el jefe llega al resultado se encuentra que el producto no es auténtico, que hubiera sido bueno *si* hubiese sido cierto. A veces intervienen una serie de juicios que se anulan unos a otros. Sigue entonces una especie de irritación: ustedes se dicen a sí mismos que nunca conseguirán exponer lo que aparece delante de ustedes".

El estado de "precisión" en el proceso de invención es completamente general e incluso la mayoría de los creadores más espontáneos lo han experimentado. El mismo Lamartine, a quien hemos visto contestar tan rápidamente, sin un instante de vacilación y casi inconscientemente cuando se le pedían unos versos, aparece, según sus biógrafos, corrigiendo repetida e infatigablemente los manuscritos de sus trabajos.

Calculadores numéricos. El proceso parece ser ligeramente distinto en un caso que a menudo se intenta mezclar con el de los matemáticos: me refiero a los calculadores prodigiosos —con frecuencia hombres sin ninguna preparación— que pueden verificar rápidamente complicados cálculos numéricos, tales como multiplicaciones entre números de diez y más cifras,

o bien que necesitan solamente un momento de reflexión para decir los minutos o segundos transcurridos desde el comienzo de nuestra era.

Esta clase de talento es en realidad diferente de la habilidad matemática. Se sabe de muy pocos matemáticos que lo hayan poseído: se conoce el caso de Gauss y Ampère y también, en el siglo XVII, de Wallis. Poincaré confiesa ser un pobre calculador numérico y lo mismo puedo decir de mí mismo.

Los calculadores excepcionales presentan a menudo notables particularidades psicológicas (3). Una de ellas, que deseo mencionar por referirse a nuestra cuestión, es que, contrariamente a lo que acabamos de ver en Poincaré, sucede que los resultados del cálculo aparecen, a los calculadores, por lo menos en parte, sin esfuerzo voluntario, únicamente por la inspiración elaborada en su inconsciente.

Tal vez el testimonio más palpable es el ofrecido por una carta del calculador Ferrol al matemático Möbius (4): "Si se me pregunta una cuestión, aunque encierre bastante dificultad, el resultado fluye inmediatamente de mi sensibili-

(3) Podemos por ejemplo mencionar la particularidad curiosa de que en muchos de ellos su habilidad calculadora ha sido temporal, desapareciendo después de algunos años.

(4) Ver *Die Anlage für Mathematik,* págs. 74-76.

dad, sin que pueda saber de momento como lo he obtenido; partiendo entonces del resultado busco el camino que debe seguirse para llegar a él. Esta capacidad intuitiva que, lo cual es bastante curioso, nunca me ha conducido a error, se ha ido desarrollando más y más a medida que aumentaban las exigencias. Ahora tengo a menudo la sensación como si existiese alguien detrás de mí que me va susurrando el verdadero camino para llegar al resultado deseado; se trata de caminos que pocos han seguido antes que yo y que ciertamente no habría encontrado si los hubiera tenido que buscar por mí mismo.

"A menudo me parece, sobre todo cuando estoy solo, que me encuentro en otro mundo. Las ideas y los números se me aparecen como seres vivientes. De repente, se presentan ante mis ojos problemas de todas clases junto con sus soluciones".

Debo añadir que Ferrol se ocupó no solamente de cálculos numéricos, sino también e incluso con más intensidad, de cálculos algebraicos. Lo más interesante es que, también en este caso, realizaba los cálculos, hasta obtener el verdadero resultado, de una manera inconsciente (5).

(5) La intervención del inconsciente en cálculos numéricos ha sido también señalada por Scripture, *American Journal of Psych.*, Vol. IV, 1891. Ver también Binet, *Psychologie des Grands Calcu-*

Apreciación del propio trabajo. Una vez obtenido por nosotros mismos un resultado, ¿qué pensamos de él?

En mi caso, puedo decir que a veces una cuestión que me ha interesado profundamente mientras la estaba investigando, pierde mi interés, poco después de haber encontrado la solución, precisamente en el instante en que debo redactarla y presentarla. Al cabo de algún tiempo, digamos un par de meses, aprecio más justamente su verdadero valor.

Paul Valéry fué preguntado sobre la misma cuestión, es decir, acerca de su opinión sobre sus propias obras una vez terminadas, en una reunión de la Sociedad de Filosofía de París y contestó: "Siempre se vuelven malas. *Je divorce*", indicación análoga a la que dió, como hemos visto, al describir el proceso de invención.

3) *La continuación de la obra. Resultados transitorios.* La doble operación de verificar y "precisar" el resultado adquiere un significado distinto cuando, según ocurre con frecuencia, no se considera al mismo como el final de la investigación, sino tan sólo como una etapa de

lateurs et Joueurs d'Echecs. Sin embargo, estos informes no son tan positivos y precisos como los de Ferrol, prestándose a una confusión entre resultados obtenidos inconscientemente y otros conocidos de antemano de memoria.

ésta (ya hemos visto tales etapas en la relación de Poincaré), de manera que se piensa en su posible "utilización".

Para esta utilización no sólo hace falta que el resultado se haya verificado, sino también que haya sido *precisado*. En efecto, puesto que sabemos que el trabajo inconsciente, si bien muestra el camino para llegar al resultado no lo ofrece en su forma precisa, puede suceder, y efectivamente sucede en muchos casos, que varias características de esta forma precisada, que no podían haberse previsto, ejerzan una influencia capital en la continuación de la idea.

Esta circunstancia se ha presentado a Poincaré en su etapa inicial, aunque no en las siguientes. Hemos mencionado sus palabras de cómo en un principio suponía que las funciones que llamó fuchsianas no podían existir, y fué únicamente el hecho de haber descubierto, durante su noche de insomnio, la conclusión contraria, lo que llevó sus pensamientos hacia la dirección que tomaron.

La interpretación de las dos primeras leyes de Kepler, condujo a Newton a suponer que todo planeta se mueve alrededor del Sol como si fuera atraído por el mismo por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Pero hay un coeficiente de proporcionalidad —la razón entre la fuerza de atracción y la

inversa del cuadrado de la distancia, la cual no debe variar durante el movimiento— y el significado de este coeficiente debe deducirse de la tercera ley de Kepler, que se refiere a la comparación entre los movimientos de los distintos planetas. La conclusión es que este coeficiente es el mismo para todos ellos. Todos los planetas obedecen a la *misma* ley de atracción, conclusión que no deriva de una concepción general y sintética de la cuestión, sino de un cuidadoso y exacto proceso de cálculo. Se puede dudar de si Newton llegó a la última conclusión de otra manera que por el cálculo efectivo con la pluma en la mano. Ahora bien, si el resultado hubiese sido diferente de lo que es, la última etapa del descubrimiento, la identificación de la fuerza que mantiene a la Luna girando alrededor de la Tierra con la que motiva la caída de los cuerpos (una manzana según la leyenda) no hubiera existido.

Tal vez sea imprudente querer imaginar como funcionaba la mente de Newton, pero debemos señalar que la identificación mencionada requiere una verificación, no solamente algebraica, sino incluso numérica, debiéndose tener en cuenta los valores de las magnitudes contenidas en las fórmulas (verificación que, según es bien conocido, Newton creyó equivocada) y si, ha-

blando estrictamente, pudiera quedar una duda sobre el ejemplo de Newton, existen otros absolutamente indubitables. Por ejemplo, es indudable que Georg Cantor no pudo haber previsto un resultado del que él mismo decía: "Lo veo, pero no puedo creerlo".

En todo caso, además, la continuación de la obra, lo mismo que su comienzo, requiere el trabajo preparatorio del cual hemos hablado. Después de haber terminado la primera etapa de la investigación, se requiere un nuevo impulso para pasar a la siguiente, el cual únicamente puede originarse y dirigirse cuando el consciente se ha posesionado del primer resultado en su forma *precisa.*

Para presentar un ejemplo bien familiar, observemos que cada cual comprende que cortando dos líneas paralelas por otras dos también paralelas, los segmentos que determinan entre sí son iguales dos a dos: es éste un hecho que todos conocen, conscientemente o no. Sin embargo, mientras no se haya enunciado conscientemente, no podrá deducirse ninguna de sus consecuencias, como, por ejemplo, la semejanza.

Un caso posible, como indica Poincaré, es que la nueva parte de la investigación sea llevada a cabo por trabajo exclusivamente consciente, o bien, como diría yo, por trabajo consciente con

la cooperación del consciente marginal. Incluso, como en el ejemplo de Newton, puede ocurrir que dicho trabajo consciente deba ser sistemático y exhaustivo. El reconocimiento de estos casos es de nuevo tarea de nuestra voluntad y el resultado preciso es esencial para ello.

Resumiendo, vemos que cada etapa de la investigación debe ser, por decirlo así, articulada con la siguiente por un resultado dado en forma precisa, al cual propondría llamar *resultado transitorio* (o fórmula transitoria si se trata de una fórmula como en el caso de la interpretación de la tercera ley de Kepler por Newton). Una vez lograda esta unión, que se presenta algo así como una bifurcación en la línea férrea, hay que decidir la nueva dirección en que deben proseguirse las investigaciones, lo cual ilustra la acción directora del consciente, que se había intentado suponer "inferior" al inconsciente.

Las observaciones anteriores pueden parecer en cierto modo evidentes, si no pueriles; pero no está de más señalar que, aparte del proceso mental de todo investigador, ellas ayudan a entender la estructura de la ciencia matemática en general. Sus progresos hubieran sido imposibles no solamente sin la verificación de los resultados, sino especialmente sin el uso sistemático de lo que hemos llamado resultados transitorios, los

cuales son con frecuencia utilizados intensa y exhaustivamente, en lo posible, hasta las últimas consecuencias. Tal es, por ejemplo, el papel del simple y clásico hecho de que cortando un triángulo por una paralela a uno de sus lados se obtiene otro triángulo semejante al primero: es un hecho evidente, pero que necesita ser enunciado con toda precisión para poder llegar a la larga serie de proposiciones que del mismo se deducen.

VI. — EL DESCUBRIMIENTO COMO SÍNTESIS. LA AYUDA DE LOS SIGNOS

La síntesis en el descubrimiento. Souriau, en su *Théorie de l'Invention,* escribe: "¿Conoce el algebrista en lo que se transformarán sus ideas cuando las introduce, en forma de signos, en sus fórmulas? ¿Es que las va siguiendo a través de todas las etapas operatorias que realiza? Indudablemente no; al contrario, las pierde de vista inmediatamente. Su única preocupación consiste en poner en orden y combinar, de acuerdo con reglas conocidas, los signos que tiene ante él y luego acepta con plena confianza el resultado obtenido".

Ya en otra oportunidad hemos dicho que nos parece difícil que Souriau haya obtenido sus informaciones de hombres profesionales. De haberlo hecho, probablemente no se hubiera expresado de esta manera. Sin embargo, no se puede decir que su afirmación sea completamente falsa. Puede admitirse su certeza, en líneas generales,

en cuanto concierne a la fase final de verificación y "precisión" de los resultados, mencionada en la Sección precedente; pero así y todo, las cosas no ocurren exactamente como él afirma. El matemático no confía tan ciegamente en los resultados de las reglas que utiliza. Sabe, por el contrario, que son posibles, y no infrecuentes, equivocaciones en los cálculos. Si el propósito del cálculo es verificar un resultado que su inspiración inconsciente o subconsciente le ha hecho prever y esta verificación fracasa, no es imposible que el error esté en los cálculos y no en la inspiración.

Si en lugar de aplicarlo únicamente en la etapa final, se extiende a todo el trabajo de investigación, el proceder que describe Souriau es el de los alumnos, y aun el de los malos alumnos; debemos esforzarnos en cambiarlo. El verdadero proceso mental en la formulación de un argumento matemático debe compararse con el proceso mencionado en la Sección II, es decir, con el acto de reconocer a una persona. Un caso intermedio que muestra la analogía entre los dos procesos se encuentra en los estudios psicológicos de los jugadores de ajedrez, algunos de los cuales, como es bien sabido, son capaces de jugar diez o doce partidas simultáneamente sin ver los tableros. Se han hecho estudios, especial-

mente por Alfred Binet, para comprender cómo esto es posible; sus resultados [1] pueden resumirse diciendo que para muchos de estos jugadores cada partida tiene, por decirlo así, una especie de fisonomía propia, que les permite pensar en ella como en una cosa única, por complicada que sea, de análoga manera como nosotros vemos la cara de una persona.

Un fenómeno de la misma naturaleza ocurre necesariamente en cualquier caso de invención. Lo hemos visto mencionado en la carta citada de Mozart (véase Sección I). Afirmaciones análogas han sido hechas por artistas como Ingres y Rodin (según Delacroix, *L'Invention et le Génie,* pág. 459). Sólo que mientras Mozart, excelentemente dotado, no parece necesitar ningún esfuerzo para ver la unidad de su obra, Rodin, en cambio, escribe: "Hasta el fin de la obra es necesario para el escultor mantener con la mayor energía en la plena luz de su consciente la idea global, para poder referirse a ella incesantemente y relacionar estrechamente con la misma los más pequeños detalles de la obra. Y esto no puede ser hecho sin una severa tensión del pensamiento".

[1] Ver el artículo de Binet en la *Revue des Deux Mondes,* Serie 3, Vol. 117 (Mayo-junio, 1893), págs. 826-859, especialmente la Sección IV.

Análogamente, todo argumento matemático, por complicado que sea, se me debe aparecer a mí como una cosa única. Siento que no lo he entendido bien hasta que no he conseguido captarlo en una idea global. Desgraciadamente, lo mismo que para Rodin, esto requiere a menudo un esfuerzo de pensamiento más o menos penoso.

El uso de los signos. Examinemos ahora una cuestión que, como intentaré probar más adelante, tiene relación con la precedente. Se trata de analizar la ayuda ofrecida al pensamiento por las representaciones concretas. Tal investigación, perteneciente al campo de la introspección, es posible solamente gracias al inconsciente marginal que hemos mencionado al final de la Sección II. Sin embargo veremos que los resultados principales subsisten muy posiblemente también para zonas más profundas del inconsciente, aunque éstas no nos sean directamente conocidas.

Pensamientos con y sin palabras. Los signos más clásicos que cooperan con el pensamiento son las palabras. Se presenta aquí una cuestión curiosa sobre la cual existen opiniones muy divergentes.

La primera alusión al respecto la hallé al leer

en *Le Temps* (1911): "La idea no puede ser concebida de otra manera que por la palabra y únicamente existe por la palabra" (2). Mi primera impresión fué que las ideas de la persona que escribía esto eran de una bien pobre calidad.

Pero me sorprendió mucho más ver como un hombre de la categoría de Max Müller, el célebre filólogo y orientalista, sostiene (3) que no puede haber pensamiento sin palabras (4), llegando a escribir la siguiente reflexión, para mí completamente ininteligible: "¿Cómo sabemos que existe un firmamento y que es azul? ¿Podríamos saber de un firmamento si no tuviéramos nombre para él?", con lo cual, no solamente se admite, con Herder, que "sin lenguaje el hombre nunca hubiera llegado a su razón", sino que se añade que sin lenguaje el hombre ni siquiera hubiera llegado a sus sentidos. ¿Es que los animales, que no hablan, carecen de sentidos?

(2) He visto incluso el caso (de efecto deplorable a mi juicio) de proponer en un examen de filosofía en París (examen elemental, perteneciente al bachillerato) el siguiente tema: "Probar que el lenguaje es para nosotros tan necesario para pensar como para comunicar nuestros pensamientos".

(3) *Three Introductory Lectures on the Science of Thought,* dictadas en Londres en 1887; Chicago, 1888; y también su obra más extensa *The Science of Thought,* publicada en el mismo año.

(4) Es muy posible que la ilimitada confianza de M. Müller en las palabras pueda derivar de los trabajos lingüísticos en los que se ocupó durante toda su vida.

La afirmación de Max Müller es más curiosa por el hecho de que en su teoría de que el pensamiento es imposible sin palabras pretende encontrar un argumento en contra de toda teoría evolutiva, o sea, una prueba de que el hombre no puede descender de ninguna especie animal. La deducción, aun admitiendo la premisa, es discutible. Pero podría legítimamente volverse contra la tesis de Max Müller teniendo en cuenta, por ejemplo, la *Mentality of Apes* de Köhler y las acciones de sus chimpancés, las cuales implican razonamiento ([5]).

Max Müller hace una exposición histórica, que vamos a reproducir en sus partes esenciales, de las distintas opiniones emitidas respecto a esta cuestión de las relaciones entre la palabra y el pensamiento; exposición que no carece de interés, tanto por ella misma, como por el punto de vista que adopta Max Müller al respecto. Vemos, en primer lugar, que los griegos utilizaban en un principio una misma palabra, "logos", para indicar el lenguaje y el pensamiento, y únicamente más tarde empezaron a distinguir ambos significados por epítetos, con lo cual, en opinión del autor, estaban naturalmente mejor

([5]) Nueva York, 1923. Véase, por ejemplo, el experimento del "bastón unido", pág. 132.

inspirados en un principio que no posteriormente.

La escolástica medioeval, por una semejanza que reside tal vez en la naturaleza de las cosas, coincide con la primera posición de la filosofía griega. Abelardo, en el siglo XII, decía que "El lenguaje está engendrado por el intelecto y engendra el intelecto". Una afirmación análoga se encuentra en un filósofo más moderno, Hobbes, el cual, por otra parte, se siente generalmente inclinado hacia la escolástica.

Pero, por regla general, las ideas toman rumbo diferente, tanto en esta cuestión como en muchas otras, con la línea de pensamiento iniciada por Descartes. Hay que señalar únicamente un período en Alemania, alrededor de 1900 (Humbodt, Schelling, Hegel, Herder) en que las doctrinas filosóficas estaban más cerca de la "verdad" según la opinión, desde luego, de Max Müller. Hegel dice sumariamente "Pensamos en nombres", como si nadie lo hubiera jamás dudado.

Pero los otros grandes filósofos de los tiempos modernos ya no están tan seguros de la identidad del lenguaje y la razón. Más exactamente, los más eminentes de ellos —sea Locke, Leibniz, o incluso Kant o Schopenhauer, o bien, más recientemente, John Stuart Mill— coinciden en una duda metódica. Notemos que Leibniz reconoce

que piensa en palabras, pero no sin lamentarlo expresamente (6). El filósofo Berkeley es absolutamente categórico, pero en la dirección opuesta; según él, las palabras son el mayor obstáculo para el pensamiento.

La apasionada opinión de Max Müller sobre la cuestión le lleva a calificar de "falta de valor" esta actitud general de los filósofos modernos, que cualquier otro llamaría más bien prudencia científica, como si no pudiera haber otra opinión sincera distinta de la suya.

Sin embargo, las admita o no, ellas existen. Inmediatamente después que fueron publicadas sus *Lectures on Science of Thought,* surgieron contradictores procedentes de las más diversas partes (7). Sobre todo se dejó sentir la autorizada voz de otro maestro de primera línea, Francis Galton, el gran genético que después de haber iniciado sus actividades como explorador hizo importantes trabajos en el campo de la psicología. Su gran costumbre de la introspección, permite asegurar a Galton que su mente no se comporta en absoluto de la manera que Max Müller

(6) *Diálogo sobre la relación entre cosas y palabras*: "Me preocupa grandemente [*Hoc unum me male habet*] observar que no puedo comprender, descubrir o demostrar ninguna verdad sin usar en mi mente palabras u otras cosas".

(7) Ver el intercambio de cartas reproducidas al final de las *Introductory Lectures.*

considera como la única posible. Tanto si está jugando al billar y calculando el recorrido de la bola, como si está investigando cuestiones más elevadas y abstractas, sus pensamientos nunca van acompañados de palabras.

Galton añade que alguna vez, estando ocupado en sus pensamientos, le ha sucedido percibir un acompañamiento de palabras *sin sentido* "como si las notas de una canción acompañasen al pensamiento". Desde luego, las palabras sin sentido son algo completamente distinto de las palabras reales; más adelante veremos con qué clase de imágenes pueden ser comparadas razonablemente.

Esta disposición mental de Galton no deja de tener sus inconvenientes. "Constituye para mí" –dice– "una seria desventaja para escribir y aun más para explicarme, puesto que en palabras no puedo pensar tan fácilmente como de la otra manera. Me sucede a menudo que después de haber trabajado intensamente y de haber llegado a resultados perfectamente claros y satisfactorios para mí mismo, cuando intento expresarlos mediante el lenguaje siento que debo empezar por colocarme en un plano intelectual completamente distinto. Debo traducir mis pensamientos a un lenguaje que no es el más adecuado para ellos. Por esto pierdo mucho tiempo

para buscar las palabras y frases apropiadas y me doy perfecta cuenta, cuando tengo que hablar improvisadamente, de ser con frecuencia muy obscuro por simple confusión de palabras y no por falta de claridad en la percepción. Esto constituye una de las pequeñas molestias de mi vida".

He querido reproducir en toda su extensión las manifestaciones de Galton por reconocer que su caso coincide con el mío propio, incluso en lo referente a las desagradables consecuencias que él, como yo, experimentaba.

El hecho de que sea imposible para Max Müller imaginar el rayo sin pensar en su nombre, no significa que "nosotros" tampoco podamos hacerlo. Para mí, si me acuerdo del rayo, veo en mi mente el resplandor de luz que he admirado tantas veces y necesito un instante de reflexión —breve, desde luego, pero ciertamente un instante— si deseo acordarme de la palabra correspondiente. Lo mismo que para Galton, esta traducción del pensamiento al lenguaje exige siempre de mi parte un esfuerzo más o menos difícil. Sean o no justificados para otras personas los versos de Boileau

"Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement
Et les mots pour le dire arrivent aisément",

el hecho es que no rigen para mí. Tengo una prueba tangible de ello —podría decir una prueba "objetiva"— en el hecho de que me es difícil pronunciar una conferencia sobre algo que no sea matemáticas sin que haya escrito previamente casi todas sus partes, único medio de evitar constantes y penosas vacilaciones en la expresión del pensamiento, que sin embargo se presenta muy claro en mi mente.

Galton considera con razón extraño que Max Müller no haya comprendido que las mentes de otras personas pueden ser diferentes de la suya; error común, pero que sorprende encontrar entre personas acostumbradas a los estudios psicológicos. Por el contrario, siendo indiscutible, según lo dicho, que existen diferencias entre las mentes de los hombres, la cuestión debe plantearse, no polémicamente, sino mediante encuestas relativas a las distintas razas humanas y clases de hombres (si ello es posible, pues veremos que se presentan diversas dificultades para ello) y no solamente entre intelectuales. Según dice Galton, interrogando al respecto cada vez que se le presentaba la ocasión, encontró un cierto porcentaje, si bien mínimo, de personas cuyo pensamiento no va acompañado habitualmente de palabras mentales ni habladas. Es de extrañar que un hombre tan bien informado en cálculos

estadísticos como Galton no diera un porcentaje preciso; más adelante veremos una posible razón de ello ([8]).

LAS IMÁGENES MENTALES EN EL PENSAMIENTO NORMAL. El pensamiento puede estar acompañado de representaciones concretas distintas de las palabras. Aristóteles admite que no podemos pensar sin imágenes. La bien conocida obra *De l'Intelligence* de Taine, está dedicada principalmente a señalar la importancia para la formación de ideas, de las imágenes, que en el comienzo del Volumen II define como sensaciones que se reproducen, reviven y resurgen espontáneamente. Sin embargo, se cree actualmente que exageró esta importancia y la consideró de manera demasiado exclusiva.

Más o menos en la misma época que Taine, Alfred Binet hizo un notable progreso en el estudio de la cuestión, abordándola por el camino experimental ([9]). Analizó unas veinte personas, especialmente dos muchachas (de 13 a 14 años de edad) de su propia familia, cuya

([8]) Galton, en sus *Inquiries into Human Faculty*, interpreta de acuerdo con las reglas de las estadística investigaciones suyas acerca de sus propias imágenes mentales. Para nosotros sería interesante hacer una investigación semejante sobre las imágenes como auxiliares del pensamiento.

([9]) *Etude Expérimentale de l'Intelligence*, París, 1903.

valiosa ayuda en ciertas delicadas investigaciones psicológicas a tan temprana edad constituye un hecho notable. Binet las sometió a experimentos puros y también, más frecuentemente, a experimentos combinados con introspección. Por ejemplo, al preguntar una cuestión o pronunciar una palabra, investigaba qué clase de ideas, imágenes, etc., había sugerido a la persona observada. El método ha sido censurado y, efectivamente, se presta a una objeción que es general a casi toda clase de experimentos psicológicos, a saber, la sugestión involuntaria del mismo experimentador. Esta circunstancia, sin embargo, no es de temer cuando los resultados son de naturaleza tan inesperada como fueron en el caso de Binet. De hecho, el método de Binet no ha sido considerado por los psicólogos como invalidado por la objeción mencionada u otras análogas, la cual ha sido refutada de manera convincente por Bühler [10], y un método en cierto modo similar fué utilizado un poco más tarde por la llamada escuela de Wurtzbourg. La creación del método, sin embargo, pertenece a Binet.

En los experimentas de Binet, la cuestión de las palabras es tratada de manera accidental. En

(10) *Archiv f. die Ges. Psych.*, Vol. IX, 1907; Vol. XII, 1908, especialmente págs. 93-123. Ver G. Dumas, *Traité de Psychologie*, Vol. I, cap. IV y Vol. II, págs. 113 y sigtes.

este punto la respuesta es favorable a Galton, en contra de Max Müller. A una de las muchachas (11), una respuesta verbal aparece como "una imagen que corta el pensamiento". El pensamiento es para ella algo que aparece repentinamente, como cualquier otra clase de sensación.

Lo más inesperado es que incluso la intervención misma de imágenes es mínima, contrariamente a la teoría de Taine. La precisión de la respuesta es tajante (12): "Para obtener imágenes, no me debe quedar nada en qué pensar. Las ideas y las imágenes están separadas unas de otras y jamás aparecen juntas. Nunca tengo imágenes cuando una palabra me sugiere un gran número de pensamientos. Debo esperar un rato. Cuando, con respecto a dicha palabra, he agotado todos los pensamientos, llegan las imágenes, y si los pensamientos empiezan de nuevo, las imágenes desaparecen y así alternativamente".

Sobre este punto, el mismo Binet concluye: "Más tarde pude convencerme de que Armanda tenía plena razón; admito que existe una especie de antagonismo entre imagen y reflexión, tanto mayor cuanto más intensa es la imagen. Las imágenes más perfectas aparecen en los estados

(11) *Etude Expérimentale de l'Intelligence*, pág. 107.
(12) *Ibid.*, pág. 124.

de sueño o ensimismamiento". Hay también el hecho, observado por Galton y otros autores, de que las mujeres y los niños tienen imágenes más perfectas que los hombres adultos, los cuales son superiores en reflexión.

Experimentos posteriores de Dwelshauvers (*Les Mecanismes Subconscients*), llevados a cabo con estudiantes, conducen a las mismas conclusiones de Binet en cuanto a la aparición de imágenes. Encuentra que las imágenes aparecen únicamente cuando se deja a las ideas en libertad incontrolada, es dcir, cuando, a pesar de estar despierto, se está soñando. Tan pronto como resurge la plena conciencia, la conciencia voluntaria, las imágens se debilitan, se obscurecen: parece como si se alejaran hacia una región desconocida.

LAS IMÁGENES MENTALES EN EL PENSAMIENTO EN TENSIÓN. Autores más recientes (Delacroix, James Angell, Titchener, Varendonk, etc.), han tratado también la misma cuestión relativa a las palabras e imágenes en el pensamiento. Sin embargo, la mayoría de sus obras no nos atañen directamente, debido a una distinción que es particularmente necesaria para nuestro objeto.

Los psicólogos distinguen dos clases de pensamiento. El pensamiento "libre", que tiene

lugar cuando dejamos vagar nuestros pensamientos sin dirigirlos hacia ningún objetivo determinado, y el pensamiento "controlado" cuando les damos efectivamente una dirección ([13]). Para nuestro objeto este segundo caso no es suficientemente preciso. Cuando se le pregunta a una persona en qué fecha estamos, no hay duda de que tiene que controlar su pensamiento para contestar. Sin embargo, este caso no es idéntico al del pensamiento de invención, que requiere un relativo esfuerzo de concentración; se puede decir que este último no es solamente controlado, sino sujeto a cierta tensión.

No hay ninguna razón para que los procesos de estas tres clases de pensamientos sean los mismos. El último caso es el único que nos concierne de manera directa.

Punto de vista de Binet. Como conclusión de su serie de experiencias, Binet ([14]) se siente inclinado a creer que las palabras o las imágenes sensoriales pueden ser útiles para dar una forma precisa a sentimientos o pensamientos que, sin esta ayuda, resultarían demasiado vagos; también

([13]) R. S. Woodworth, *Psychology* (4ª Ed., 1949), pág. 33. A veces, Woodworth habla de preguntas *difíciles*, que caerían por tanto dentro de nuestro tercer caso de pensamiento en tensión, más bien que en el caso de pensamiento simplemente controlado.

([14]) *Etude Expérimentale de l'Intelligence*, pág. 108.

para darnos la plena conciencia de un pensamiento que de otra manera quedaría como un acto inconsciente de la mente; para permitir el paso de las ideas del inconsciente al consciente, o bien, más exactamente, del inconsciente donde están en forma vaga, al consciente donde adquieren precisión.

Durante algún tiempo, yo mismo estuve inclinado a admitir esta concepción de Binet. En efecto, ella satisface hasta cierto punto la doble y aparentemente contradictoria condición:

a) Que la ayuda de las imágenes es absolutamente necesaria para dirigir mi pensamiento.

b) Que ellas nunca me han engañado ni temo que me engañen.

Sin embargo, reflexiones posteriores me llevaron a una concepción diferente. En efecto, los casos de las experiencias de Binet y Dwelshauvers no son iguales a los nuestros; ellos operan con pensamientos controlados, pero no con pensamientos en estado de tensión. A las dos muchachas se les preguntaron cuestiones del tipo: "¿Qué aparece en tu mente cuando piensas en lo que hiciste ayer?". La cuestión más difícil que se les preguntó, según resulta del libro de Binet, fué: "Piensa en lo que te gustaría hacer si pudieras disponer de tres horas para ti misma,

siendo completamente libre de hacer lo que quisieras".

OBSERVACIONES PERSONALES. El caso del trabajo de investigación es, desde luego, muy distinto. Por esta razón he deseado comprender lo que ocurre en mi propia mente cuando intento construir alguna cosa o bien comprender un argumento matemático, cuestiones que, como dije al principio, no difieren entre sí de manera esencial.

Insisto en que las palabras están totalmente ausentes de mi mente cuando realmente estoy pensando y coincido completamente con Galton en el sentido de que incluso después de leer u oír una cuestión, toda palabra desaparece en el mismo instante en que empiezo a pensar sobre ella. Las palabras no vuelven a aparecer en mi consciente (15) hasta que he terminado o dejado

(15) Es muy posible, y casi probable, que las palabras estén presentes en el inconsciente marginal. Me imagino que éste es para mí el caso en cuanto a las palabras usadas en matemáticas. Sin embargo, dudo de que ocurra lo mismo para otras clases de pensamiento, puesto que de ser así tendría menos dificultad en encontrarlas. Max Müller incurre en una confusión evidente cuando, después de citar a William Hamilton, quen observa que "un concepto debe ser adquirido antes de que pueda recibir un signo", de manera que la idea debe siempre preceder a la palabra, dice que está de acuerdo (*sic*) con él, por el hecho de que la afirmación de William Hamilton significa un progreso "casi contemporáneo" del pensamiento y la denominación. Aun siendo

a un lado la investigación, tal como sucedía a Galton. Concuerdo exactamente con Schopenhauer cuando escribe: "Los pensamientos mueren en el instante en que son materializados por las palabras".

Creo esencial insistir en que en estas consideraciones incluyo no sólo las palabras, sino también los signos algebraicos. A éstos los utilizo para cálculos fáciles, pero cuando la cuestión parece difícil, se convierten en una carga demasiado pesada para mí; utilizo entonces representaciones concretas, pero de naturaleza completamente distinta.

Un ejemplo de esta clase es ya conocido en la historia de la ciencia. Fué dado por Euler con el objeto de explicar a una princesa sueca las propiedades del silogismo. Se representan las ideas generales por círculos; si entonces se quieren distinguir dos categorías de cosas, A y B, tales que toda A sea una B, basta imaginar un círculo A interior a un círculo B. Si, por el contrario, se quiere indicar que ninguna A es una B, se to-

un psicólogo ocasional, conozco lo suficiente para comprender que los procesos mentales son a menudo rápidos y que sería absurdo estudiarlos sin distinguir entre estados "casi contemporáneos" y estados simultáneos. Por otra parte, William Hamilton expresa su opinión sobre la cuestión de manera bien clara cuando dice: "La palabra es por tanto no la madre, sino la madrina del conocimiento".

mará el círculo A completamente exterior al B. Finalmente, si algunas A son B y otras no, los dos círculos representativos serán círculos secantes. Ahora bien, yo personalmente, si tuviera que pensar en un silogismo, no lo haría mediante palabras —las cuales difícilmente me permitirían ver si el silogismo es correcto o equivocado— sino mediante una representación análoga a la de Euler; sólo que no utilizaría círculos, sino figuras de formas indefinida, puesto que no hace falta una forma precisa para pensar en figuras que son interiores o exteriores entre sí.

Para considerar un caso un poco menos simple, tomemos la demostración elemental y bien conocida del siguiente teorema de aritmética: "La sucesión de los números primos es ilimitada". Voy a repetir los pasos sucesivos de la demostración clásica de este teorema, escribiendo correlativamente las imágenes mentales engendradas en mi mente. Para demostrar, por ejemplo, que hay un número primo mayor que 11 tenemos:

PASOS DE LA DEMOSTRACIÓN	MIS IMÁGENES MENTALES
Considero todos los números primos desde 2 hasta 11, a saber, 2, 3, 5, 7, 11.	Veo una masa confusa.
Formo el producto: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = N$	Siendo N un número grande, imagino un punto alejado de la masa confusa.
Aumento este producto en 1, o sea formo el número N más 1.	Veo un segundo punto un poco más allá del primero.
Este número, si no es primo, debe admitir un divisor primo que es el número buscado.	Veo un lugar en alguna parte entre la masa confusa y el primer punto.

¿Cuál puede ser el uso de estas raras y nebulosas imágenes? Ciertamente no sirven para recordarme ninguna propiedad sobre divisibilidad, números primos o ninguna otra cosa. Este hecho es muy importante, puesto que cualquier indicación de este tipo que pudieran darme, sería posiblemente más o menos inexacta y podría engañarme. Por esto el mecanismo satisface a la condición (*b*) antes exigida. Por el contrario, esta condición es sólo parcialmente satisfecha en la hipótesis de Binet, pues al dar precisión a las ideas del inconsciente se corre siempre el riesgo de alterarlas.

Al mismo tiempo se puede fácilmente com-

probar que este mecanismo u otro análogo puede serme necesario para entender la demostración anterior. En efecto, me es necesario para tener una visión simultánea de todos los elementos del argumento, para captarlos juntos y hacer de ellos una cosa única; dicho brevemente, para realizar la síntesis de que hablé en el comienzo de esta Sección y dar al problema su fisonomía. El mecanismo no me informa de ningún eslabón del argumento (es decir, de ninguna propiedad de los números primos o relativa a la divisibilidad de números), pero me recuerda cómo estos eslabones deben ordenarse entre sí. Si nos atenemos a la comparación de Poincaré, esta sucesión de imágenes es necesaria para que los eslabones útiles, una vez obtenidos, no se pierdan nuevamente.

En realidad toda investigación matemática me obliga a construir un esquema análogo, que siempre es y debe ser de carácter vago, para no ser engañoso. Voy a dar otro ejemplo menos elemental, deducido de mi primer trabajo de investigación (mi tesis de doctorado). Debía considerar una suma de un número infinito de términos, con el propósito de calcular su orden de magnitud. Un grupo de estos términos debía ser predominante, siendo despreciable la influencia de los demás. Ahora bien, cuando pienso

en esta cuestión, no veo la fórmula misma, sino el lugar que ella ocuparía si estuviera escrita: una especie de franja que se hace más densa o más obscura en el lugar de los posibles términos importantes; o bien, en otros momentos, veo algo como una fórmula que no es en ningún modo legible, como la vería (siendo fuertemente présbita) si no llevara anteojos, cuyas letras parecen hacerse más claras (si bien todavía *no legibles*) en el lugar que se supone sea el más importante.

Varios amigos me han dicho que tengo una manera especial de mirar cuando estoy entregado a la investigación matemática. No hay duda de que este hecho está relacionado con la construcción del esquema mencionado.

Esto se vincula con la cuestión de la fatiga intelectual. He preguntado a varios fisiólogos prominentes, especialmente a Louis Lapicque, cómo se explica que el trabajo intelectual pueda producir fatiga, ya que no parece que se produzca "trabajo" en el sentido físico de esta palabra. La opinión de Lapicque es que el trabajo intelectual debe compararse tan sólo con el acto de dar vuelta a las páginas de un libro. Sin embargo, la fatiga intelectual existe; desde el punto de vista objetivo y fisiológico ha sido estudiada en un importante libro de Binet y Víctor Henri. Esta parte de la cuestión cae fue-

ra de mi dominio. Desde el punto de vista psicológico puede considerarse cierto, análogamente a lo que hemos dicho en el caso de Rodin, que la fatiga corresponde al esfuerzo de síntesis, al hecho de dar unidad a la investigación y, en consecuencia, por lo menos en mi caso, a la construcción del esquema apropiado.

Puedo añadir todavía una o dos observaciones.

Si uso una pizarra y escribo la expresión 2.3.5.7.11, el esquema descrito anteriormente desaparece de mi mente como si hubiera llegado a ser inútil, y es reemplazado automáticamente por la fórmula que tengo ante mis ojos.

Además, debo observar que pertenezco claramente al tipo auditivo ([16]) y, sin embargo, en

([16]) Tengo muy mala memoria de fisonomías y estoy muy expuesto a equivocaciones respecto al reconocimiento de las personas. Por el contrario, soy muy sensible al sonido de los nombres sintiendo mucho más deseos de ver el río Mohawk o el Mattawamkeag por el solo hecho de que sus nombres despiertan en mi mente la idea de las selvas y la vida en la India, que por lo que justificaría su belleza. Además soy mucho menos sensible que otros respecto a los parecidos de las caras y mucho más sensible respecto al parecido de las voces.

No pocos errores de escritura automática (véase la Sección II, pág. 51) son debidos a imágenes mentales auditivas. Hay clásicos ejemplos de esta clase. Personalmente son en mi caso muy frecuentes: mi yo consciente dicta a mi yo inconsciente, el cual escribe una palabra en lugar de otra si sus sonidos son en cierta manera parecidos. Durante la escritura de este trabajo recuerdo haber escrito "simple" en lugar de "same place" y "will she" en lugar de "we shall". Me imagino que estos errores auditivos son

estas cuestiones mis imágenes mentales son exclusivamente visuales. La razón me parece completamente clara: tales imágenes visuales por el mismo motivo son naturalmente vagas y ya hemos visto que esto es una condición necesaria para que puedan guiar al pensamiento sin conducirlo a error.

Debo añadir también que el caso examinado se refiere especialmente a los estudios aritméticos, algebraicos o analíticos. Cuando abordo alguna investigación geométrica, tengo en general una visión mental de la figura misma, aunque generalmente inadecuada e incompleta, a pesar de lo cual produce la síntesis necesaria, tendencia que parecería resultar de una ejercitación iniciada en mi primera infancia.

Aunque parezca paradójico, en estos problemas geométricos sucede a menudo que uso con éxito un proceso completamente opuesto al de síntesis explicado en lo que precede. Consigo abstraer alguna parte especial del diagrama y considerarlo aparte del resto, consideración que me conduce a un resultado transitorio. No obstante, incluso en este caso, el argumento completo sigue siendo abarcado como una entidad única, como una síntesis en la cual queda in-

en mi caso más frecuentes cuando escribo en inglés que cuando lo hago en francés, cosa completamente natural.

cluído, si existe, el resultado transitorio mencionado. Este es un proceso que, según Pierre Boutroux ([17]) (véase más adelante), decía Descartes que era frecuente en la geometría griega.

PAPELES RESPECTIVOS DEL CONSCIENTE PLENO Y DEL CONSCIENTE MARGINAL. Las observaciones anteriores se refieren al funcionamiento del pensamiento en el estado de intensa concentración, ya sea por estar ocupado en un trabajo plenamente consciente o en un trabajo consciente preliminar.

Como hemos explicado al final de la Sección II, esta elevada concentración nos da la posibilidad de distinguir entre el consciente pleno y el consciente marginal, distinción que en otras circunstancias suele ser difícil, pero que en este caso es fácilmente accesible a la observación.

¿Qué da la observación respecto al fenómeno que acabamos de describir?

Podría suponerse *a priori* que los eslabones del argumento se encuentran en el consciente pleno, mientras las imágenes correspondientes son pensadas por el subconsciente. Sin embargo, mi introspección personal me lleva sin ninguna duda a la conclusión contraria: mi consciente

([17]) Sin embargo, P. Boutroux no da una referencia precisa.

está enfocado sobre las imágenes sucesivas, o más exactamente, sobre la imagen global; los argumentos esperan, por decirlo así, en la antecámara (véase pág. 56) para ser introducidos en el momento de empezar el período de "precisión".

Este ejemplo ilustra de la manera más clara la naturaleza y el papel que desempeña el inconsciente marginal, el cual puede decirse que está al servicio del consciente pleno y siempre a punto de aparecer en cuanto la necesidad se presente.

OTRAS ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN. ¿Qué sucede cuando hay un período de incubación, o sea cuando entra en acción una capa más profunda del inconsciente? Desde luego no se puede dar una contestación directa; pero una fuerte presunción de que debe haber algún mecanismo análogo a una especie de trabajo, resulta del hecho de que ello parece ser lo más adecuado para que se satisfaga la doble condición (a), (b) anteriormente mencionada.

Incluso el caso de iluminación se debe interpretar de manera análoga. Cuando pienso en el ejemplo mencionado en la Sección I (véase pág. 29) tengo ante mí un diagrama esquemático: un cuadrado, del cual están dibujados únicamente los lados verticales y, en su inte-

rior, cuatro puntos formando los vértices de un rectángulo y unidos por diagonales apenas perceptibles; un diagrama cuyo significado simbólico será claro para los ténicos. Incluso, por lo que puedo recordar, me parece que éste fué mi modo de ver la cuestión en 1892. Naturalmente que los recuerdos de una época distante de la actual más de medio siglo no son completamente dignos de confianza; sin embargo, hay que reconocer que los diagramas simbólicos son esenciales para nuestro punto de vista sintético de las cuestiones, y me parece que un tal punto de vista sintético es por lo menos tan necesario en los casos de iluminación como en el trabajo consciente. Si admitimos esta línea de razonamiento, la iluminación debería ser transmitida desde una profundidad más o menos grande del inconsciente al inconsciente marginal, que a su vez la representaría por un diagrama simbólico en el yo consciente.

Esta, imagen y su significado están en cierta manera relacionados entre sí, y, al mismo tiempo, son independientes, como observó Watt en los *Archiv. f. d. Ges. Psych.*, 1904, Vol. IV (véase el *Traité de Psychologie* de G. Dumas, Vol. I, Cap. IV). Me parece que esta simultánea conexión e independencia queda mejor aclarada con la intervención del consciente marginal.

Sigue entonces la etapa de la verificación y "precisión". En esta etapa final del trabajo puedo usar símbolos algebraicos, aunque, muy a menudo, no los utilizo de la manera regular y usual. No tengo tiempo de escribir las ecuaciones completas, cuidándome únicamente de ver, por decirlo así, la forma como se presentan. Estas ecuaciones o algunos términos de las mismas están a menudo dispuestas en un orden peculiar y gracioso, como los actores en un escenario desde el cual me "hablan" mientras continúo trabajando con ellas. Pero si después de haber sido interrumpido en mis cálculos, los prosigo el día siguiente, lo que había escrito de aquella manera aparece "muerto" para mí. Generalmente no puedo hacer otra cosa que tirar la hoja y empezar los cálculos de nuevo, a no ser que durante el primer día hubiese obtenido una o dos fórmulas que por haber sido plenamente comprobadas, pueda utilizarlas como fórmulas transitorias.

En cuanto a las palabras, permanecen ausentes en absoluto de mi mente hasta llegar el momento de comunicar los resultados obtnidos en forma oral o escrita, o bien (muy excepcionalmente) para los resultados transitorios. En este último caso puede ocurrir, como observa William Hamilton, que las palabras sean el intermediario "necesario para dar estabilidad a nuestro proceso

intelectual, para consolidar cada paso en nuestro progreso como un nuevo punto de partida para seguir avanzando hacia adelante", en lo cual Hamilton tiene razón, excepto en su suposición de que cualquier resultado transitorio puede realizar un tal papel ([18]).

OTRA CONCEPCIÓN. Después de haber adquirido alguna información acerca de la escuela objetivista (*behaviorist*), me admiré de cómo su doctrina se comporta en lo referente a nuestra cuestión actual y de cómo ella concuerda con mis observaciones. Entiendo que para el objetivista no es necesario pensar mediante palabras, sino que, por el contrario, nuestro pensamiento puede consistir en movimientos musculares, ta-

([18]) William Hamilton se vale de una interesante comparación con el proceso de hacer un túnel a través de un banco de arena: "En esta operación es imposible seguir adelante sin que cada pie, más, casi cada pulgada de nuestro progreso no sea asegurada por un arco de construcción antes de intentar la excavación de lo siguiente. Ahora bien, el lenguaje es a la mente precisamente lo que el arco es al túnel. El poder de pensar y el poder de excavar no dependen de las palabras en el primer caso, ni de la obra de albañilería en el segundo, pero sin estos elementos auxiliares ningún proceso podría llevarse más allá de su rudimentario comienzo".

Más generalmente, la función que acabamos de describir pertenece a lo que hemos llamado resultados transitorios. En el esfuerzo inventivo, estos resultados no siempre implican la necesidad de las palabras.

les como un encogimiento de hombros, movimientos de los párpados o de los ojos, etc.

No tengo observaciones acerca de tales movimientos relacionados con mis trabajos de investigación. Desde luego no puedo observar yo mismo estos movimientos mientras estoy profundamente absorto por mis investigaciones, pero testigos de mi vida diaria y de mi trabajo pueden asegurar que nunca observaron nada en este sentido. Únicamente notaron una cierta mirada "interior" especial que a menudo suelo tener cuando estoy sumergido en reflexiones profundas y concentradas. Lo que puedo decir es que no veo qué clase de movimientos pueden ayudarme a aclarar los razonamientos más o menos difíciles, mientras que por el contrario, hemos visto como ciertas imágenes mentales apropiadas pueden evidentemente ser útiles para ello.

Una encuesta entre matemáticos. Con respecto a nuestro problema actual es natural investigar el comportamiento de los matemáticos en general. Desgraciadamente no me ha sido posible obtener información de los matemáticos franceses por haber pensado en esta cuestión después de mi partida de Europa.

Respecto a los matemáticos nacidos o residentes en América a quienes he interrogado, los

fenómenos son en su mayoría análogos a los referidos para mi propio caso (19). Prácticamente todos ellos evitan —contrariamente a lo que encuestas ocasionales sugirieron a Galton para el hombre de la calle— no solamente el uso de palabras mentales, sino también, al igual que en mi caso, el uso mental de signos algebraicos o de otros signos más precisos; lo mismo que yo, usan imágenes vagas. Hay dos o tres casos excepcionales, el más importante de los cuales es el del matemático George D. Birkhoff, uno de los primeros del mundo que suele tener la visión de símbolos algebraicos y trabajar con ellos mentalmente. La contestación de Norbert Wiener es que puede pensar lo mismo con palabras o sin ellas. Jessie Douglas generalmente piensa sin palabras ni signos algebraicos; eventualmente sus pensamientos referentes a investigaciones están relacionados con palabras, pero solamente en cuanto a su ritmo, como una especie de lenguaje de Morse donde aparece únicamente el número de sílabas de algunos vocablos. Desde luego esto no tiene nada en común con la tesis de Max Müller y es completamente análogo al

(19) Estando imprimiéndose el original, me llega una carta del profesor Einstein que contiene informaciones del mayor interés. Véase el Apéndice II.

uso de palabras sin sentido mencionado por Galton.

El caso de Pólya —me propongo hablar únicamente de matemáticos que han hecho descubrimientos de verdadera importancia— es diferente. Debe hacer uso eventual de las palabras: "Creo" —me escribe— "que la idea decisiva que da la solución de un problema está muy a menudo relacionada con una palabra o frase bien lograda. La palabra o la frase ilumina la cuestión, proporciona elementos o, como usted dice, le da fisonomía. Puede preceder de cerca a la idea decisiva o seguir a ella inmediatamente; tal vez se presente en el mismo instante que la idea decisiva... La palabra precisa, la palabra sutil apropiada, ayuda a recordar la idea matemática, tal vez menos completamente y menos objetivamente que un diagrama o una notación matemática, pero de manera análoga... Puede contribuir a fijar la idea en la mente". Además, encuentra que una notación apropiada —es decir, una letra bien elegida para indicar una cantidad matemática— puede dar una ayuda semejante, y cierta clases de juegos de palabras, sean de mejor o peor calidad, pueden ser útiles para el mismo propósito. Por ejemplo, en sus clases dictadas en alemán en una universidad suiza, Pólya acostumbraba indicar a sus alumnos que z y w son

las iniciales de las palabras alemanas "Zahl" (número) y "Wert" (valor) que, precisamente, indican los papeles respectivos que desempeñan *z* y *w* en la teoría que estaba desarrollando.

Este caso de Pólya me parece completamente excepcional (no he encontrado otro parecido entre las demás personas que me han contestado) ([20]). Incluso en este caso, sin embargo, las palabras no se usan como equivalentes a ideas, puesto que emplea *una* palabra o una o dos letras para simbolizar una línea entera de pensamiento; su proceso psicológico estaría de acuerdo con la afirmación de Stanley de que ([21]) "el lenguaje, como indicador, puede indicar únicamente sugiriendo a nuestro consciente la cosa indicada, sea un objeto, pensamiento o sentimiento, incluso cuando se utiliza en la forma más breve e inconsciente en que ha sido transformado por la práctica".

Las imágenes mentales de los matemáticos de los cuales he recibido contestación son en la mayoría de los casos visuales, pero pueden ser también de otra clase, por ejemplo, cinéticas.

([20]) Recientemente he oído que algo análogo es el caso del profesor Chevalley.

([21]) *Psychological Review,* Vol. IV, 1891, pág. 71. En este lugar, Stanley se ocupa principalmente de la invención poética, en la cual el papel de las palabras es evidentemente más importante que en ninguna otra clase de invención.

Pueden asimismo ser auditivas, pero aun en este caso, como lo prueba el ejemplo de J. Douglas, conservan generalmente su carácter de vaguedad ([22]). Para B. O. Koopman, "las imágenes tienen una relación simbólica, más que diagramática, con las ideas matemáticas" consideradas, descripción cuya analogía con la anterior es evidente. Las observaciones del profesor Koopman coinciden también con las mías sobre el hecho de que tales imágenes aparecen con plena conciencia, mientras que los argumentos correspondientes permanecen provisionalmente en la "antecámara".

Podemos decir algo semejante de las observaciones que Ribot ([23]) reunió de los matemáticos a los cuales consultó sobre estas cuestiones. Algunos le contestaron que piensan de manera puramente algebraica, con la ayuda de signos; otros necesitan *siempre* una "representación figurada", una "construcción", incluso si ésta es "considerada como pura ficción".

Algunas ideas de Descartes. En las *Regulae ad Directionem Ingenii,* las cuales en su se-

([22]) Uno de mis colegas de la Universidad de Columbia me escribe que su pensamiento matemático está por lo común acompañado de imágenes visuales y raramente por palabras que no sean vagas exclamaciones de sorpresa, irritación, etc.

([23]) *Evolution des Idées Générales,* pág. 143.

gunda mitad (de la regla 14 en adelante) tratan del papel de la imaginación en la ciencia, Descartes parece haber concebido la idea de procesos similares a los últimamente mencionados. Por lo menos esto parece deducirse de algunos puntos del análisis hecho de las *Regulae* por Pierre Boutroux [24]. Por ejemplo, según Boutroux, se dice: "La imaginación por sí misma es incapaz de crear la ciencia, pero en ciertos casos su concurso se hace necesario. En primer lugar, al enfocarla sobre el objeto que se desea estudiar evitamos que se desvíe y, además, puede ser útil para despertar ciertas ideas". Además, "la imaginación será principalmente de gran utilidad para resolver un problema mediante varias deducciones cuyos resultados deban ser coordinados después de su completa enumeración. La memoria es necesaria para retener los datos del problema si no se utilizan todos desde el principio. Si las imágenes de los objetos que se consideran no están constantemente presentes en la mente y no se ofrecen en cada instante, se corre el peligro de olvidar los datos del problema".

Éste es el mismo papel de las imágenes que hemos descrito anteriormente. Sin embargo,

[24] *L'Imagination et les Mathématiques selon Descartes,* Biblioteca de la Facultad de Letras de París, Vol. 10, 1900.

Descartes desconfía de esta intervención de la imaginación y desea eliminarla completamente de la ciencia. Incluso reprocha a la geometría antigua el haberla utilizado. Su deseo es eliminar la imaginación de todas las ramas de la ciencia, reduciéndolas a la matemática (deseo que intenta realizar pero que no consigue) ya que la matemática, más que ninguna otra ciencia, consiste de puro entendimiento.

Para ver lo que debemos pensar de esta idea, bastará recordar la manera como ha sido llevado a cabo el programa de Descartes por los matemáticos modernos. En primer lugar, como es bien sabido, la geometría puede ser reducida completamente a combinaciones numéricas mediante la geometría analítica que el mismo Descartes creó. Pero, por otra parte, acabamos de ver que las deducciones en el reino de los números pueden, por lo menos en la mente de muchos matemáticos, estar la mayoría de las veces acompañadas de imágenes.

Más recientemente, otra exposición rigurosa de los principios de la geometría, completamente libre desde el punto de vista lógico de toda idea intuitiva, ha sido hecha sobre bases completamente distintas por el célebre matemático Hilbert. Su punto de partida, actualmente clásico entre los matemáticos, es "considerar tres siste-

mas de cosas. Las que componen el primer sistema se llamarán *puntos;* las del segundo *rectas,* y las del tercero *planos*", lo cual significa claramente que de ninguna manera debemos preocuparnos de lo que tales "cosas" puedan representar.

Lógicamente, desde luego —y esto es lo esencial— el objetivo perseguido es alcanzado completamente, pues toda intervención del sentido geométrico queda eliminada. Es decir, este sentido acaba por ser teóricamente innecesario para seguir el razonamiento desde el principio hasta al fin. ¿Ocurre lo mismo desde el punto de vista psicológico? Ciertamente no. No hay duda de que Hilbert al construir sus *Principios de geometría* estuvo guiado constantemente por su sentido geométrico. Si alguien dudara de ello (lo que no hará ningún matemático), basta que hojee el libro de Hilbert: contiene figuras en casi cada página. Sin embargo, todo lector matemático sabe que, desde el punto de vista lógico, ninguna de estas figuras es necesaria ([25]).

([25]) Como observa Klein, ya es una paradoja que podamos razonar sobre un ángulo igual a una millonésima de segundo de arco, a pesar de que seamos incapaces de distinguir los lados de un tal ángulo. La discusión de esta cuestión por Winter (*Revue de Métaphysique et de Morale,* 1908, pág. 923), uno de los filósofos que mejor han comprendido los problemas científicos, muestra la analogía de dicha circunstancia con nuestras observaciones del texto.

Éste es nuevamente un caso en que sirven de guía las imágenes, aunque no se es esclavo de ellas, y resulta de nuevo posible (por lo menos en mi caso particular) gracias a la misma división del trabajo entre el consciente propiamente dicho y el consciente marginal ([26]).

Análogamente, Descartes censura la costumbre que observa en los geómetras griegos (véase lo dicho anteriormente) de considerar separadamente partes de una misma figura. No hay razón para tal objeción. Nos encontramos con la misma confusión que existe entre los procesos lógicos y los psicológicos. El método en cuestión no compromete para nada el rigor del razonamiento, de la misma manera que la imagen mencionada anteriormente no compromete la demostración de que los números primos forman una sucesión ilimitada.

OTROS PENSADORES. Sobre estas cuestiones tenemos pocos datos pertenecientes a campos que no sean el matemático. Es curioso que, según la mencionada obra de Binet (*Etude Expé-*

([26]) Otro ejemplo que encontraremos en la Sección VII (ver la nota 2 de esta Sección) ilustrará esto todavía más claramente y de manera más convincente. En efecto, en dicho ejemplo de la Sección VII, no puede haber duda (por lo menos en lo referente a mi propia mente) sobre la manera como la división del trabajo mencionada en el texto tiene lugar.

rimentale de l'Intelligence, pp. 127-129) incluso en el pensamiento libre pueden presentarse imágenes vagas como representantes de ideas más precisas.

Un ejemplo completamente análogo a nuestra descripción anterior es el del economista Sidgwick, relatado por él mismo en el Congreso Internacional de Psicología Experimental de 1892. Sus razonamientos sobre cuestiones económicas estaban casi siempre acompañados de imágenes y "las imágenes eran a menudo curiosamente arbitrarias y algunas veces casi indescifrablemente simbólicas. Por ejemplo, necesité mucho tiempo para descubrir que una extraña imagen simbólica que acompañaba la palabra "valor" era una borrosa imagen parcial de un hombre poniendo algo sobre el platillo de una balanza". Otro proceso muy curioso se presenta entre los compositores de música, según refiere Julius Bahle (*Der Musikalische Schaffensprozess,* Leipzig, Hirzel, 1936; mencionado por Delacroix, *L'Invention et le Génie,* pág. 520). Muchos de ellos, en su concepción inicial, ven sus creaciones de manera visual (la inspiración es lo que llama una "Tonvision"). Uno de ellos percibe de esta manera, sin ninguna presencia musical, "la línea y las características principales de la música. Por otra parte, es tal vez difícil decir hasta qué punto

la música está ausente de este esquema formal" [27].

He preguntado solamente a pocas personas pertenecientes a otras ramas de la actividad intelectual. Las respuestas han sido varias y no puedo asegurar que los resultados no puedan diferir de los que hemos obtenido anteriormente [28].

Varios científicos me han hablado de imágenes mentales análogas a las descritas. Por ejemplo [29], el profesor Claude Levi-Strauss, cuando está pensando en alguna cuestión difícil referente a sus estudios etnográficos, suele ver, como me ocurre a mí, figuras imprecisas y esquemáticas, las cuales, sin embargo, presentan la característica notable de ser tridimensionales. También algunos químicos que fueron preguntados estuvieron de acuerdo en que experimentaban pensamientos sin palabras, ayudados con imágenes mentales.

(27) Un pintor me comunica que en la primera fase de la composición sus imágenes visuales son voluntariamente vagas.

(28) Nuestro político Arístides Briand, de acuerdo con las observaciones de uno de sus más íntimos colaboradores que tuvo a menudo ocasión de observarlo mientras estaba trabajando, no pensaba mediante palabras cuando preparaba sus discursos. Las palabras aparecían únicamente en el momento de pronunciarlos.

Sería muy interesante conocer la opinión de algunos jefes militares destacados. No puede haber mejor caso en que una visión simultánea de la síntesis y de cada detalle sea más esencial.

(29) Tal es el caso del profesor Román Jakobson (ver pág. 163).

La mente del psicólogo André Mayer se comporta de manera absolutamente diferente. Me comunica que su pensamiento se le aparece inmediatamente en forma completamente definida, de manera que no necesita ningún esfuerzo para exponerlo por escrito.

Sería interesnte saber cómo se comportan los médicos a este respecto en el difícil acto de hacer un diagnóstico. Tuve la oportunidad de preguntar a uno famoso, el cual me dijo que en este caso piensa siempre sin palabras, aunque su pensamiento utiliza palabras en los estudios teóricos y científicos.

Una manera de pensar que parece a primera vista sorprendente fué descrita por el psicólogo Ribot ([30]), quien luego encontró que era más frecuente de lo que podía esperarse. Consiste en lo que llama el "tipo visual-tipográfico" y en ver las ideas mentales en forma de las correspondientes palabras impresas. El primer descubrimiento de este caso por Ribot, fué el de un hombre que él menciona como un fisiólogo bien conocido.

([30]) *L'Evolution des Idées Générales,* pág. 143. Según me informa su hijo, Jean Perrin experimentaba imágenes *intermitentes* del tipo visual-tipográfico. Francis Perrin generalmente piensa sin palabras, pero de vez en cuando se le presenta alguna palabra. Las ideas de Sidgwick aparecen del tipo visual-tipográfico cuando, en lugar de pensar en cuestiones económicas, piensa sobre matemáticas o lógica.

Para este hombre incluso las palabras "perro", "animal" (a pesar de que vivía entre perros y experimentaba diariamente con ellos) no estaban acompañadas de ninguna imagen, sino que las veía como palabras impresas. Análogamente, cuando oía el nombre de un íntimo amigo, lo veía primeramente en letras impresas y tenía que hacer luego un cierto esfuerzo para ver la imagen de este amigo. Lo mismo le ocurría con la palabra "agua" y el ácido carbónico o el hidrógeno, que se le aparecían en la mente o bien por sus nombres completos en letras impresas o bien por sus símbolos químicos. Profundamente sorprendido por estas afirmaciones, de cuya sinceridad y exactitud no podía dudar, Ribot prosiguió investigando y observó que el caso no era de ninguna manera único, sino que el mismo y otros muy parecidos tenían lugar para gran número de personas.

Hay más: según Ribot, las personas del tipo visual-tipográfico no pueden concebir cómo otras personas puedan pensar de manera diferente a la suya.

Éste es el estado mental que ya hemos mencionado en el caso de Max Müller y que pertenece al tipo, más general, del pensamiento con palabras y que es realmente asombroso encontrarlo entre personas dedicadas al estudio de

cuestiones filosóficas. ¿Cómo podemos extrañarnos de que hayan sido quemadas vivas personas por diferencias en opiniones teológicas, cuando vemos que un hombre eminente como Max Müller, a propósito de una inocente cuestión de psicología usa palabras desdeñosas contra su viejo maestro Lotze por haber escrito que el significado lógico de una proposición dada es por sí mismo independiente de la forma en que la expresa el lenguaje? ([31]).

De esta manera hemos sido llevados a un capítulo de la psicología completamente diferente del que constituye nuestro principal objetivo. Algunas partes de esta Sección podrían titularse "Un caso de incomprensión psicológica".

Éste no es de ninguna manera el único ejemplo del doble hecho: 1) Que la psicología de individuos diferentes puede diferir en puntos esenciales: 2) Que, en este caso, puede ser casi

([31]) Max Müller concede que "con algún esfuerzo" puede penetrar en la mente de un decidido adversario como Berkeley, "una especie de alucinación filosófica", para usar sus propias palabras. Pero no puede entender que *la mayoría* de nuestros pensamientos sean dirigidos por el lenguaje, sin serlo completamente todos, ni que la mayoría de la gente piensa mediante palabras, pero que no todo el mundo lo hace. Que algunos de los grandes escritores puedan haber afirmado esto no por "falta de valor" sino por ser la realidad, parece estar fuera del alcance de su imaginación.

imposible para los unos concebir el estado mental de los demás ([82]).

¿TIENE INCONVENIENTES EL PENSAR CON PALABRAS? Evidentemente debo guardarme de no caer en el mismo defecto de incomprensión que acabamos de señalar. Ciertamente debo confesar mi incomprensión ante el hecho de que sean posibles ciertos tipos verbales o tipos como el

([82]) Por paradójico que parezca, existen dos ejemplos de este hecho en el terreno de las matemáticas. Algunos años antes de la primera Gran Guerra mundial, una cuestión que si bien de carácter matemático, estaba relacionada con la metafísica, ocasionó una agitada discusión entre varios de nosotros, especialmente entre yo mismo y uno de mis mejores y más respetados amigos, el gran científico Lebesgue. No pudimos evitar la conclusión de que la evidencia —o sea, el punto de partida de la certeza para todo orden de pensamiento— no tenía el mismo significado para él y para mí. Sólo que, desde luego, no estuvimos nunca tentados de despreciarnos mutuamente, sino que reconocimos la imposibilidad de entendernos uno al otro.

El asunto en cuestión pertenecía a la teoría de los "conjuntos". Ahora bien, cuando en 1879-1884 Georg Cantor comunicó sus resultados fundamentales sobre esta teoría (actualmente una de las bases de la ciencia contemporánea), uno de ellos parecía tan paradójico y discrepaba tan radicalmente de las nociones entonces tenidas por fundamentales, que motivó la decidida hostilidad de Kronecker, uno de los primeros matemáticos de aquel tiempo, quien impidió que Cantor obtuviera ninguna cátedra en las universidades alemanes e incluso que publicara ninguna memoria en revistas alemanas. Sin embargo, la demostración del resultado mencionado es tan clara y rigurosa como cualquier otra demostración matemática, no ofreciendo ninguna posibilidad de no ser admitida.

visual-tipográfico y difícilmente puedo dejar de pensar en los versos de Goethe:

"Denn wo Begriffe fehlen,
Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein".

Pero no puedo olvidar que hombres como Max Müller y otros, nada mediocres, piensan de tal manera, aunque yo no llegue a entenderlo. A este respecto lamento que Ribot no publicara el nombre del fisiólogo de quien habla y no podamos, en consecuencia, formarnos una idea sobre el valor de su obra.

Para quienes no pensamos con palabras, la principal dificultad para comprender a quienes lo hacen radica en nuestra falta de habilidad para entender cómo ellos pueden estar seguros de que no son engañados por las palabras que usan (véase nuestra condición b), pág. 130). Como dice Ribot (33): "La palabra se parece mucho al papel moneda y otros valores (billetes de banco, cheques,...), con la misma utilidad y los mismos peligros".

(33) *The Psychology of Attention,* pág. 52 (traducción de 1911; pág. 85 de la edición francesa de 1889). En el mismo lugar Ribot describe también la evolución de esta función de la palabra. Escribe: "La observación de como cuentan los niños y, mejor todavía, como lo hacen los salvajes, muestra claramente que las palabras, en un principio adheridas firmemente a los objetos, después a las imágenes, van separándose progresivamente de ellas, hasta conseguir una vida independiente para sí mismas".

Este peligro no ha pasado inadvertido. Locke menciona el caso de personas que usan palabras *en lugar* de ideas, y ya hemos visto como Leibniz sentía cierta inquietud por la influencia del pensar con palabras sobre el curso de su pensamiento.

Es curioso que Max Müller dice indirectamente lo mismo. Opone a Kant su amigo Hamann, a quien alaba intensamente, y cita la siguiente frase de este último: "El lenguaje no es sólo el fundamento de toda facultad de pensar, sino también el punto central del cual derivan los errores de la razón misma . . . El problema, para mí, no consiste en saber qué es la razón, sino en qué es el lenguaje. Y sospecho que aquí está el fundamento de los paralogismos y antinomias que se atribuyen a la razón".

Esto estaría muy bien si, procediendo en consecuencia, Max Müller nos previniera contra tales confusiones derivadas del lenguaje; pero, al contrario, sigue manteniendo que las palabras, por sí mismas, nunca pueden conducir a error: "La palabra por sí misma es clara, simple y verdadera; somos nosotros quienes la adulteramos, obscurecemos y enturbiamos".

No tendría que hablar más de Max Müller si la afirmación anterior contenida en las *Introductory Lectures* no fuera más allá de las cues-

tiones examinadas hasta aquí referentes a pensamientos y palabras. Inmediatamente después de la cita de Hamann, debida aparentemente a una deformación profesional, nos habla de "la ciencia del pensamiento, fundada como está sobre la ciencia del lenguaje". ¿Debemos creer que el lenguaje no solamente debe acompañar el pensamiento sino que debe gobernarlo?

Desgraciadamente para su tesis, tal tendencia no parece haberle sido siempre cómoda. Debe tratarse de un hombre que identifique el pensamiento con las palabras para atacar la teoría de Darwin ([34]) basándose únicamente en la palabra "selección" y despreciando, por considerar una "metáfora encubierta", el verdadero significado de esta palabra en las ideas de Darwin.

Por el contrario, el pensador que utiliza las palabras mentalmente, puede entender que no sólo éstas, sino cualquier otra clase de signos auxiliares no desempeñan otro papel que el de simples rótulos unidos a las ideas. Este pensador podrá, más o menos conscientemente, aplicar métodos propios (que sería interesante estudiar) para dar a cada palabra un determinado papel y no otro. Hemos visto que Pólya mismo, el único entre los matemáticos consultados que hace uso abundante de las palabras, introduce

([34]) *The Science of Thought,* Vol. I, pág. 97.

una sola de ellas para todo un curso de pensamiento, de manera que la misma le recuerde la idea central, y por su parte Jessie Douglas representa algunas palabras por su simple ritmo silábico. Análogamente, uno de mis colegas en cuestiones literarias, piensa con palabras, pero de vez en cuando introduce un vocablo "inexistente". Este proceso, comparable con el de Jessie Douglas y el de Galton, me parece evidentemente útil para el mismo propósito.

En el pensamiento de Leibniz podemos estar seguros de que las confusiones temidas por Hamann no podían presentarse; ante todo por tratarse de Leibniz y, en segundo lugar, por ser conocedor del peligro. Pero, a pesar de estar poco especializado en las teorías de los metafísicos, me siento un poco inquieto al leer en la *Evolution des Idées Générales* de Ribot que entre ellos el tipo visual-tipográfico parece ser, con abrumadora mayoría, el más frecuente.

Parece, en efecto, que entre los filósofos hay cierta tendencia a confundir el pensamiento lógico con el uso de las palabras. Por ejemplo, es difícil no reconocer esta confusión en William James cuando se lamenta de que ([35]): "estamos tan atados a la tradición filosófica que trata generalmente al *logos* o pensamiento discursivo

([35]) *A Pluralistic Univers,* pág. 272.

como el único camino que conduce a la verdad, que el retroceder a la primitiva vida sin palabras tiene mucho de revelación . . .". La expresión "sin palabras" no deja duda de que la palabra *logos* es utilizada en el sentido de los primitivos griegos.

¿No es ésta la tendencia que puede conducir a error a quienes se dejan gobernar por ella? Leyendo las objeciones de Fouillée referentes al inconsciente en su *Evolutionisme des Idées Force* (ver Sección II, pág. 60) dudo si no confundirá las palabras con las razones.

Igualmente siento cierta incomodidad cuando veo que Locke y análogamente John Stuart Mill consideran necesario el uso de las palabras siempre que se trate de ideas complejas. Por el contrario, mi opinión y la de la mayoría de los científicos, es que cuando más complicada y difícil es una cuestión, tanta más desconfianza deben merecer las palabras, tanto más debe vigilarse a este peligroso aliado y su precisión a veces traidora.

UNA DESCRIPCIÓN VALIOSA. Aunque, referente a esta cuestión de las relaciones entre el pensamiento y las palabras, todavía existen opiniones divergentes puede decirse que en la actualidad es generalmente admitido que para pensar

no hace falta la presencia de las palabras. Por otra parte, varios psicólogos recientes, incluso los que insisten sobre la importancia de las palabras ([86]), han observado como nosotros la intervención de imágenes vagas que en realidad no representan otra cosa que ideas simbólicas ([87]).

No voy a analizar estas obras, pero no puedo resistir la tentación de reproducir una comunicación muy interesante que me ha sido amablemente enviada por el profesor Román Jakobson quien, al lado de su bien conocida obra filológica, mantiene un fecundo interés por los asuntos psicológicos. Dice así:

"Los signos son un soporte necesario para el pensamiento. Para el pensamiento sociabilizado (etapa de comunicación) y para el pensamiento en vías de sociabilización (etapa de formulación), el sistema de signos más usual es el lenguaje propiamente dicho; pero el pensamiento interior, especialmente el pensamiento creador, usa deliberadamente otros sistemas de signos, los cuales son más flexibles, menos anquilosados que el lenguaje y dejan una mayor libertad, un mayor dinamismo al pensamiento creador...

([86]) Ver Delacroix, *Le Langage et la Pensée*, págs. 384 y sgtes. y compárese con la nota de la pág. 406.

([87]) Ver también, Titchener, *Experimental Psychology of the Thought Processes*, especialmente la Conferencia I y las Notas correspondientes.

Entre todos estos signos o símbolos, se deben distinguir los símbolos convencionales, tomados de convenciones sociales, y, por otra parte, los signos personales que a su vez pueden dividirse en signos constantes, pertenecientes a hábitos generales; signos particulares, pertenecientes a características particulares de la persona considerada y signos episódicos establecidos *ad hoc* y que sólo participan en un acto creador particular".

Este análisis, notablemente profundo y preciso, aclara bellamente nuestras observaciones hechas anteriormente. Es digno de mención el hecho de que pueda haber una tal coincidencia entre mentes que trabajan en ramas tan diferentes.

COMPARACIÓN CON OTRA CUESTIÓN REFERENTE A LAS IMÀGENES. Podemos decir que las imágenes constituyen el motivo principal de la famosa obra de Taine *De l'Intelligence*. En ella, sin embargo, son tratadas desde un punto de vista un poco diferente del nuestro (puesto que el pensamiento en estado de tensión apenas es considerado). Hay, no obstante, una cuestión referente a las imágenes que le interesa particularmente y sobre la cual las observaciones precedentes hacen posible arrojar alguna luz. Como

observa Taine con insistencia, debe explicarse cómo es que las imágenes, que aparecen a menudo muy vivamente, sean sin embargo siempre distintas de las sensaciones reales y cómo es que nuestra mente pueda distinguir entre las imágenes y las alucinaciones ([88]).

En nuestro caso tenemos una sucesión de imágenes que se desarrollan paralelamente al pensamiento propiamente dicho. Ambas corrientes mentales, imágenes y razonamiento, se guían mutuamente de manera constante aunque conservándose perfectamente distintas e incluso, hasta cierto grado, independientes; hemos visto que esto es debido a la cooperación entre el consciente propiamente dicho y el consciente marginal. Se puede suponer que hay cierta analogía entre los dos fenómenos y que el uno puede ayudarnos a comprender el otro.

¿PUEDE EDUCARSE LA FORMACIÓN DE IMÁGENES? Las consideraciones anteriores sugieren una cuestión análoga a la que se presentó al final de la Sección IV. En el supuesto caso de que se desee, ¿es posible influir por nuestra voluntad sobre la naturaleza de los signos auxiliares usados

([88]) La misma cuestión adquiere gran importancia en algunos estudios psicológicos de Varendonck. Véase su libro *Psychology of Day Dreams,* especialmente el Cap. II, págs. 75-86.

por nuestro pensamiento? Efectivamente, esto ha sido hecho; Titchener ha llevado a cabo un notable ensayo en dicho sentido. Según él mismo explica [89], su tendencia natural hubiera sido utilizar la conversación interior; pero "temiendo que, con el transcurso de los años, uno tienda a transformarse cada vez más en tipo verbal", intentó asiduamente y consiguió tener éxito en obtener una amplia extensión y una gran variedad de imágenes.

La importancia demasiado grande de la intervención verbal en su pensamiento, fué de esta manera aminorada por una renovación constante de imágenes. Lo más curioso es que para estos propósitos usa no solamente imágenes visuales, sino también, principalmente, imágenes auditivas, es decir, musicales.

Pero recurre también a la ayuda de imágenes visuales "que están siempre a mi disposición", dice, "y que puedo modelar y dirigir a voluntad". "Al leer cualquier obra, instintivamente ordeno los hechos o argumentos según un modelo visual y encuentro tan fácil el pensar con términos de estos modelos como el pensar con palabras", y cuanto mejor la obra se ajusta al modelo, tanto mejor es comprendida.

(89) *Experimental Psychology of the Thought Processes*, pág. 7 y sgtes.

Una tal autoeducación de los procesos mentales me parecer ser uno de los progresos más notables de la psicología.

Observaciones generales. Todo lo anterior se refiere a personas ocupadas en trabajos intelectuales. Las investigaciones entre otros grupos de personas parecen chocar con la dificultad de que, como hemos visto, las leyes del pensamiento en estado de tensión pueden ser y parecen ser en realidad muy diferentes de las leyes del pensamiento común y usual, que es el único frecuente entre las personas corrientes. Ésta es probablemente la razón de por qué Galton, aun viendo la necesidad de una encuesta más general, fué incapaz de hacerla.

En todo caso, vemos que, mientras lo dicho en las Secciones precedentes parece ser común a los distintos tipos de mentes creadoras, la naturaleza de las representaciones auxiliares puede variar considerablemente de una mente a otra.

VII. — LAS DIVERSAS CLASES DE INTELIGENCIAS MATEMÁTICAS

Los fenómenos considerados en las Secciones I-IV parece que se presentan de manera análoga a muchos investigadores matemáticos. Por el contrario, las representaciones concretas estudiadas en la Sección precedente están lejos de ser las mismas para todos. Vamos a dedicar esta Sección a analizar las diferencias entre las distintas modalidades del pensamiento matemático. Estas consideraciones vienen a tener, respecto a las anteriores, las mismas relaciones que la fisiología general presenta con los diversos géneros y especies zoológicas.

El caso del sentido común. Partamos desde el principio, es decir, del caso de las personas que simplemente razonan con su sentido común. En este caso, podemos decir que el inconsciente lo proporciona casi todo, dejando poco para una ulterior elaboración consciente.

Sucede a menudo, por otra parte, que el inconsciente es muy superficial y sus datos no difieren esencialmente del razonamiento regular. Así, aludiendo al clásico silogismo, "Todo hombre es mortal – Pedro es hombre – luego Pedro es mortal", Spencer hace la comparación con el hecho de oír que un hombre de 90 años se propone construir una casa por sus propios medios. Spencer no tiene dificultad en probar que el silogismo mencionado está realmente presente en nuestro consciente marginal y que, entre él y la corriente de pensamiento —que es instantánea, como toda acción inconsciente— que nos conduce a decir que el hombre del ejemplo está loco, no hay más que una diferencia de forma. De manera análoga suceden las cosas en muchas deducciones matemáticas simples.

En otros casos, sin embargo, los caminos seguidos por el sentido común suelen ser muy diferentes de los que pueden ser formulados por un razonamiento explícito. Tal sucede especialmente en cuestiones de naturaleza concreta, como las geométricas o mecánicas. Nuestras ideas sobre estas cuestiones, adquiridas desde la infancia, parece como si fueran relegadas a un remoto inconsciente; no las conocemos exactamente y es probable que ellas impliquen a menudo razones empíricas, tomadas no de un verdade-

ro razonamiento sino de la experiencia de los sentidos. Consideremos uno o dos ejemplos.

Supongamos que arrojo lo que se llama "un punto material" —es decir, un cuerpo muy pequeño, tal como una piedrecita— el cual se moverá según su velocidad inicial y su peso. El sentido común nos dice que el movimiento debe tener lugar en un plano vertical, el plano vertical P que contiene la dirección inicial de lanzamiento. En este caso es casi seguro que el razonamiento subconsciente usa el "principio de razón suficiente", puesto que no hay ninguna razón para que el punto móvil se desplace hacia la derecha con preferencia a la izquierda del plano mencionado P.

La demostración matemática, por ejemplo la clásica que se da en los cursos de mecánica racional, procede de una manera fundamentalmente distinta, utilizando varios teoremas de cálculo diferencial e integral. Se debe observar, sin embargo, que la prueba dada por el sentido común puede ser transformada en otra perfectamente rigurosa, aplicando un teorema general (también perteneciente al cálculo integral) que afirma que bajo las condiciones supuestas (dadas la dirección y magnitud de la velocidad inicial) el movimiento está unívocamente determinado. Este teorema, a su vez, puede ser demostrado

rigurosamente, pero la demostración se expone únicamente en los cursos superiores de cálculo, de manera que en la enseñanza ordinaria el método sugerido por el sentido común para llegar a la conclusión, resulta menos elemental que el otro.

Consideremos dos ejemplos de geometría. Si pensamos en una curva determinada en el plano por el movimiento continuo de un punto, es un hecho de sentido común que en todos sus puntos (o en todos menos algunos puntos excepcionales) la curva admitirá tangente (en otras palabras, que, en cada instante el movimiento debe tener lugar según una determinada dirección). No sabemos cómo nuestro sentido común, o sea nuestro inconsciente, llega a tal conclusión: tal vez por empirismo, es decir, por la memoria de las curvas que estamos acostumbrados a ver, o bien, como supone F. Klein, por una confusión entre las curvas geométricas, que carecen de anchura, y las curvas que se pueden trazar realmente, las cuales siempre poseen una mayor o menor anchura. Sea como sea, la conclusión es falsa; los matemáticos pueden construir curvas continuas sin tangente en ningún punto.

En segundo lugar, consideremos una curva cerrada sin "punto doble", es decir, que no se corte a sí misma. Es evidente al sentido común

que una tal curva, cualquiera que sea su forma, divide al plano: (*a*) en dos regiones diferentes; (*b*) en solamente dos regiones.

No es posible saber cómo llega el sentido común a esta conclusión, pero es probable que intervenga nuevamente el empirismo. Esta vez la conclusión es correcta (constituye el llamado teorema de Jordan), pero a pesar de ser tan evidente a nuestro sentido común su demostración no es, ni mucho menos, elemental.

Mediante ejemplos como éstos se llega a la conclusión de que, por lo menos en cierta clase de cuestiones referentes a los fundamentos ([1]), no podemos tener una plena seguridad sobre nuestra intuición espacial ordinaria. Como las propiedades geométricas pueden siempre ser traducidas en propiedades aritméticas, gracias a la intervención de la geometría analítica, todos los argumentos deben siempre ser completamente aritmetizados o, por lo menos, se debe estar seguro de que esta aritmetización es posible, aunque no se realice completamente por brevedad. La frase de Pascal "Tout ce qui passe la Géométrie nous passe", debe ser sustituída por el matemático moderno por "Tout ce qui passe l'Arithmétique nous passe".

([1]) Las cuestiones a que nos referimos dependen de la aritmetización tanto como de las ideas de Hilbert mencionadas en la Sección VI.

Por ejemplo, toda demostración del teorema de Jordan que hemos citado últimamente, debe ser aritmetizable para que sea completamente satisfactoria (2).

SEGUNDO PASO: EL ESTUDIANTE DE MATEMÀTICAS. Después de la etapa del sentido común, el pensamiento humano pasa a la etapa científica, que como hemos visto, está caracterizada por la intervención de la triple operación de verificar los resultados, "precisar" los mismos y, sobre todo, hacerlos utilizables, lo cual, como dijimos, requiere el enunciado de los resultados transitorios. Hemos visto, además, que todo esto es esencial tanto para asegurar la certeza de los conocimientos adquiridos, como para que resulten fecundos y sea posible ampliarlos.

(2) Sobre este punto vale la misma observación hecha para los *Principles* de Hilbert. He dado una demostración simplificada de la parte (a) del teorema de Jordan. Desde luego, esta demostración es completamente aritmetizable (de otra manera no sería completa), pero al obtenerla nunca dejé de pensar en la figura (sólo que consideraba una curva muy complicada) y lo mismo sigo haciendo para acordarme de ella. No puedo decir que haya verificado explícitamente que cada eslabón del razonamiento es aritmetizable (en otros términos, el argumento aritmetizado *no* aparece generalmente en mi pleno consciente). Sin embargo, que cada eslabón puede ser aritmetizado está fuera de duda tanto para mí como para cualquier otro matemático que lea la demostración; puedo darla inmediatamente en su forma aritmetizada, lo cual prueba que esta forma aritmetizada está presente en mi consciente marginal.

Estos caracteres pueden servir para comprender lo que ocurre, en sentido psicológico, al pasar del primer estado al segundo, es decir, al pasar del razonamiento común al razonamiento del estudiante de matemáticas.

Es bien conocido lo frecuentes que son, en este caso, los errores y los fracasos. A este respecto me limitaré a unas pocas palabras, pues el asunto ha sido tratado profundamente por Poincaré (*Les définitions dans l'Enseignement*, en *Science et Méthode*). Ante todo, no está de más observar que el caso del estudiante de matemáticas pertenece ya a nuestro tema, es decir, a la invención. Entre el trabajo de un estudiante que trata de resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención, puede decirse que hay únicamente una diferencia de grado, una diferencia de nivel, tratándose en realidad de trabajos de naturaleza muy análoga.

Ahora bien, ¿cómo se explica que muchas personas sean incapaces de un trabajo de esta naturaleza, o sea, sean incapaces de entender las matemáticas? Esto es lo que Poincaré examina, señalando muy claramente que la verdadera razón radica en el sentido que debe darse a la palabra "entender".

"Entender la demostración de un teorema, ¿consiste en examinar sucesivamente cada uno

de los silogismos que la componen, asegurándose de que son válidos y conformse a las reglas del juego?... Para algunos, sí; una vez hecho esto dicen que han entendido la demostración.

"Para la mayoría, no. Casi todos son mucho más precisos; no se conforman con saber únicamente que todos los silogismos de la demostración son correctos, sino que desean saber por qué ellos se engranan en el orden establecido y no en otro. Mientras estos engranajes les parezcan engendrados por capricho y no por una inteligencia consciente del fin al que desea llegar, no creen haber entendido la demostración.

"Sin duda ellos mismos no son conscientes de lo que piden y no pueden formular su deseo, pero si no se les da satisfacción, sienten vagamente que les falta algo".

Es fácil comprender la relación entre estas frases y nuestras consideraciones anteriores. Para la enseñanza —sea oral o escrita— cada parte del argumento debe expresarse en forma plenamente consciente, correspondiente a la verificación simultánea de las etapas de verificación y "precisión" que hemos descrito antes. Incluso, con vistas a ulteriores consecuencias, hay tendencia a aumentar el número de los resultados transitorios. En esta manera de trabajar, que parece la mejor para dar una clase y una rigurosa presen-

tación a los principiantes, no queda nada, sin embargo, de la síntesis cuya importancia ya hemos señalado en la Sección precedente. Pero esta síntesis es precisamente el hilo conductor y sin ella nos parecemos al ciego que puede pasear, pero sin saber nunca en qué dirección lo hace.

A quienes aparece esta síntesis, puede decirse que "entienden las matemáticas". En el caso contrario, hay dos actitudes posibles, mencionadas por Poincaré. La más general es la segunda: el estudiante siente que algo le falta, pero no puede saber en qué consiste; si no vence esta dificultad está perdido.

En el primero de los casos mencionados por Poincaré, el estudiante, al no encontrar ningún proceso sintético, prosigue sin él. Aunque esto le permite seguir sus estudios, a menudo por varios años, su caso es, desde cierto punto de vista, peor que el anterior, puesto que en este último comprendía por lo menos la existencia de una dificultad.

Entre los que deben demostrar conocimientos matemáticos exigidos en mayor o menor grado para ingresar en ciertas carreras, se encuentran con frecuencia alumnos de esta clase. He visto el caso de un aspirante que, guiado por su sentido común, supo la contestación correcta a mi

pregunta, pero no pensó que podía darla, ni comprendió que la sugestión de su subconsciente podía fácilmente transformarse en una demostración correcta y rigurosa.

Ejemplos curiosos de este tipo no son raros entre alumnos de cálculo diferencial e integral. Muchas veces la cuestión que se les presenta consiste en saber si un cierto teorema o una cierta fórmula son efectivamente los que se deben aplicar, o bien si las condiciones para esta aplicación están o no satisfechas. A veces, hay estudiantes que investigan minuciosamente una cuestión que por sentido común es prácticamente evidente y, por otra parte, descuidan el estudio de otras cuestiones delicadas que efectivamente necesitan un examen cuidadoso. Observaciones de este tipo pueden ser útiles en pedagogía.

INTELIGENCIAS LÓGICAS E INTUITIVAS. ASPECTO POLÍTICO DE LA CUESTIÓN. Después de haber hablado de los estudiantes, pasemos a los matemáticos mismos, capaces no solamente de entender las teorías matemáticas, sino también de investigar en ellas.

Este trabajo de los matemáticos no sólo difiere del de los estudiantes ordinarios, sino que puede presentar diversas modalidades profundamente

distintas entre sí. Se ha señalado sobre todo una distinción capital: algunos matemáticos son "intuitivos" y otros "lógicos". Poincaré y el matemático alemán F. Klein se han ocupado de esta distinción. La conferencia de Poincaré en la cual analiza la cuestión empieza de la manera siguiente:

"Unos matemáticos están principalmente preocupadas por la lógica; al leer sus obras uno se siente inclinado a creer que han ido avanzando paso a paso, a la manera de Vauban que avanza trinchera por trinchera sobre la plaza sitiada, sin dejar nada al azar. Otros están guiados por la intuición y de primer golpe hacen rápidas, aunque a veces precarias, conquistas, como intrépidos soldados de la caballería de vanguardia".

Klein introduce incluso la política en esta cuestión, diciendo (8): "Parecería como si una natural y fuerte intuición espacial fuera atributo de la raza teutona, mientras que el sentido crítico, puramente lógico, estuviera más desarrollado entre las razas latina y hebrea". Bastará que analicemos algunos ejemplos, como haremos más adelante, para ver claramente que esta afirmación no está de acuerdo con los hechos. Al decir esto queda fuera de duda que, implícitamente,

(8) *The Evanston Colloquium,* pág. 46.

Klein considera que la intuición, con su carácter misterioso, es superior al prosaico camino de la lógica (ya nos hemos encontrado con esta tendencia en la Sección III) y es evidentemente simpático reclamar esta superioridad para sus compatriotas. Recientemente, con el nazismo, se ha vuelto a hablar de esta modalidad etnográfica que, según vemos, tenía ya su forma análoga en 1893.

Esta interpretación tendenciosa de los hechos aparece siempre que entran en juego las pasiones nacionalistas. En los comienzos de la primera guerra mundial uno de los más grandes científicos e historiadores franceses de la ciencia, el físico Duhem, fué ofuscado por ello de la misma manera que Klein, sólo que en sentido opuesto. En un detallado artículo (4) describe a los científicos alemanes, en especial a los matemáticos, como carentes de intuición o a la cual dejan deliberadamente a un lado. Es difícil comprender cómo puede incluir en esta tendencia a Bernhard Riemann, indudablemente uno de los ejemplos más típicos de inteligencia intuitiva. La afirmación de Duhem en 1915 me parece tan falta de razón como la de Klein en 1893. Si una u otra fueran ciertas, se deduciría de todo lo que precede que ni los franceses ni los ale-

(4) *Revue des Deux Mondes* (Enero-febrero, 1915), pág. 657.

manes podrían haber hecho nunca ningún descubrimiento de importancia. A este respecto la única cosa que podría reprocharse a la escuela matemática alemana es la tendencia sistemática, difícilmente defendible y muchas veces no libre de cierta pedantería, a utilizar, debido principalmente a la influencia de Klein, las "series" en lugar de "integrales" para ciertas demostraciones de análisis y sus aplicaciones aritméticas. Y ello precisamente en cuestiones en que el uso de las series parece más lógico y el de las integrales más intuitivo. Es posible que influya de nuevo el nacionalismo en esta tendencia, debido a que las series fueron utilizadas por el célebre Weierstrass —un lógico evidente— cuya reputación e influencia entre los profesores alemanes fué enorme, mientras que en materias análogas Cauchy y Hermite fueron los introductores de las integrales ([5]) (que, sin embargo, también fueron utilizadas por Riemann).

([5]) De acuerdo con esta tendencia, Klein cree necesario modificar la demostración de un célebre teorema de Hermite e incluso, al llegar a cierto punto, dice "la demostración no es todavía completamente simple: todavía queda algo de las ideas de Hermite", lo cual le induce a realizar nuevas modificaciones. De hecho, estas "simplificaciones" son superficiales y después de ellas, lo mismo que antes de ellas, todo —absolutamente todo lo esencial— queda lo mismo que en la idea fundamental de Hermite.

OPINIÓN DE POINCARÉ SOBRE LA DISTINCIÓN. Más prudentemente, en mi opinión, Poincaré no mezcla esta cuestión con la política. Por el contrario, demuestra explícitamente cuán dudosa se presenta esta conexión al considerar como ejemplos representativos de las dos tendencias opuestas primero a dos franceses y después a dos alemanes.

Sin embargo, después de haber aceptado completamente y seguido fielmente las ideas de Poincaré en las Secciones I a V, esta vez me es forzoso estar en desacuerdo con él. Hemos citado ya el primer párrafo de su conferencia. Reproduzcamos ahora el segundo:

"El método no esá impuesto por la materia tratada. Aunque se dice con frecuencia de los primeros que son *analistas* y de los restantes *geómetras,* ello no debe significar que los analistas cambien de clase cuando trabajan en geometría, ni que los geómetras dejen de serlo cuando se ocupan de cuestiones del más puro análisis. Es la verdadera naturaleza de su mente lo que los hace lógicos o intuitivos, y no pueden por tanto perder esta característica cuando se dedican a una nueva cuestión".

¿Qué debemos pensar de la comparación de estos dos párrafos? En ambos se señala la distinción entre intuición y lógica, pero sobre bases

completamente diferentes, si bien en cierto modo relacionadas entre sí ([6]).

Esto aparece todavía con mayor claridad en los ejemplos sucesivos de Poincaré. En ellos compara, como pertenecientes a los dos tipos opuestos, a Joseph Bertrand, que visiblemente tenía una visión concreta y espacial de cada cuestión, con Hermite, cuyos ojos "parecen evitar el contacto con el mundo" y que busca "dentro, no fuera, la visión de la verdad".

Que Hermite no estaba hecho para pensar en concreto es cierto. Tenía una especie de aversión por la geometría e incluso una vez me reprochó el haber escrito una memoria geométrica. Como es natural, sus memorias sobre asuntos concretos son pocas y no las más notables. Por tanto, desde el segundo punto de vista de Poincaré, Hermite debe ser considerado como un matemático lógico.

Sin embargo, ¡nada puede parecerme más contrario a la verdad que considerar a Hermite como un lógico! Sus métodos parecían siempre nacer en su mente de alguna manera misteriosa. En sus clases en la Sorbona, que escuchábamos con incansable entusiasmo, acostumbraba empezar su explicación con "Partamos de la identi-

([6]) Véanse las observaciones hechas al comienzo de esta Sección (pág. 170).

dad . . ." y escribía una fórmula cuya validez era cierta, pero cuyo origen en su cerebro y camino de llegar a ella no daba a conocer ni dejaba sospechar. Esta cualidad de su inteligencia queda también ejemplificada claramente con su célebre descubrimiento en la teoría de las formas cuadráticas. En esta cuestión son posibles dos casos en los cuales, como se sabe, las cosas se comportan de manera completamente diferente. En el primero, la "reducción" era conocida desde Gauss. En el segundo caso nadie al parecer había tenido la idea de realizar simplemente los cálculos análogos a los del primer caso; los cuales, aparentemente, nada tenían que ver con este segundo caso; parecía completamente absurdo que ellos, también en el segundo caso, condujeran a la solución, y sin embargo, como por arte de magia, así era. El mecanismo de este extraordinario fenómeno fué explicado parcialmente, algunos años más tarde, mediante una interpretación geométrica (dada no por Hermite sino por Klein), pero no fué completamente clara para mí hasta leer la explicación que de la misma dió Poincaré en una de sus primeras notas (7). No puedo imaginar un tipo más perfecto de mente

(7) Poincaré mismo, a pesar de sus fenómenos de inspiración que hemos mencionado, no me causa la misma impresión. Leyendo cualquiera de sus grandes descubrimientos, no puedo dejar de imaginar (lo cual, evidentemente, es una ilusión) que, a pesar

intuitiva que la de Hermite, exceptuados los casos extremos que mencionaremos al final de la Sección siguiente. El ejemplo de Hermite prueba sin ninguna duda que las dos definiciones de intuición y lógica dadas por Poincaré no están de acuerdo, o por lo menos no son aplicables en todos los casos, como, por otra parte, admite también finalmente Poincaré hasta cierto punto teniendo en cuenta precisamente el caso anterior.

Los dos matemáticos alemanes que Poincaré compara son Weierstrass y Riemann. Su conclusión de que Riemann es completamente intuitivo y Weierstrass típicamente lógico está fuera

de su magnificencia, debería haberse encontrado mucho antes. Mientras que, al contrario, las memorias de Hermite, como por ejemplo aquella a la que se hace referencia en el texto, despiertan en mí la idea: "¡Qué resultados magníficos! ¿Cómo pudo él imaginar tales cosas?"

Naturalmente que hay algo de subjetivo en este juicio. Una deducción que puede parecerme lógica a mí —es decir, concordante con la manera de ser de mi mente— puede parecer intuitiva a otra persona. Tal vez todo matemático sea un lógico de acuerdo con su propia opinión. Por ejemplo, me han preguntado varias veces por qué especie de adivinanza se me ocurrió el artificio de la "parte finita de una integral infinita" que he utilizado para la integración de ecuaciones en derivadas parciales. Ciertamente, considerado en sí mismo, parece un ejemplo típico del "pensar de lado". Sin embargo, la realidad es que por mucho tiempo mi mente rehusaba concebir esta idea y no lo hizo hasta que fué positivamente obligada a ello. Llegué a esta idea paso a paso, como puede comprobar fácilmente el lector matemático que se tome la molestia de consultar mis trabajos sobre este asunto, en especial mi memoria *Recherches sur les Solutions Fon-*

de toda duda. Pero, respecto del último, Poincaré añade: "Se pueden hojear todos sus libros sin encontrar una sola figura", y esto me parece contener un error de hecho ([8]). Es cierto que en *casi* ninguna memoria de Weierstrass se encuentran figuras; pero hay una excepción. Una excepción que precisamente tiene lugar en una de sus obras más claras y magistrales, una de las que da una mayor y completa impresión de perfección: me refiero a aquella en que expone su método fundamental del cálculo de variaciones. En esta memoria Weierstrass dibuja una figura ([9]) y, después de haber dado el paso inicial, todo sigue por el camino lógico que indudablemente le caracteriza, de manera que con sólo mirar la figura, cualquier persona suficientemente versada en los métodos matemáticos podría reconstruir el argumento en su totalidad.

damentales et l'Intégration des Equations lineaires aux Dérivées Partielles, Segunda memoria, especialmente págs. 121 y sigtes. (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Vol. XXII, 1905). No pude evitar el artificio de análoga manera como el prisionero de la novela *The Pit and the Pendulum* (El pozo y el péndulo) de Poe no pudo evitar el agujero del centro de su celda.

([8]) Un error del cual, sin embargo, no puede culparse a Poincaré (véase la próxima nota).

([9]) Si fué el propio Weierstrass quien dibujó la figura (o si simplemente lo describió en palabras) no puede saberse, por el hecho de que no desarrolló el método más que en clases orales. El método quedó desconocido durante años, excepto para sus primeros alumnos.

Pero, desde luego, hubo una intuición inicial: la de construir la figura. Éste fué el acto más difícil y evidentemente el más genial, porque significó romper con los métodos generales que habían resultado cada vez más eficaces desde la invención del cálculo infinitesimal y que habían sido bellamente fecundos en manos de Lagrange para obtener la primera etapa de la solución, pero que no permitieron a nadie completarla correctamente. Weierstrass demostró cómo el verdadero camino para llegar a la completa solución consistía en abandonar aquellos métodos y operar directamente.

En realidad, como vemos, se trata de un caso innegable del hecho general de que la lógica sigue a una intuición inicial.

APLICACIÓN DE NUESTROS DATOS ANTERIORES. Vemos por tanto la necesidad de admitir que no puede darse una definición única de la intuición como opuesta a la lógica, sino que por lo menos deben existir dos definiciones diferentes. Ahora bien, los resultados que hemos obtenido en nuestro primer análisis del fenómeno, ¿no servirán para aclarar este punto?

Resumiendo los resultados de aquel análisis, recordemos que todo trabajo mental, y en especial el de descubrimiento, implica la coopera-

ción del inconsciente, ya sea el superficial o, como sucede con frecuencia, otro más o menos remoto. Recordemos también que, dentro del inconsciente y como resultado de un trabajo consciente preliminar, tiene lugar la puesta en marcha de las ideas que Poincaré ha comparado con el movimiento de los átomos, en virtud de la cual los átomos pueden esparcirse más o menos y que las representaciones concretas son usadas generalmente por la inteligencia para la conservación y síntesis de las combinaciones.

Esto lleva, en primer lugar, a la consecuencia de que, hablando estrictamente, es difícil un descubrimiento completamente lógico. Para iniciar el trabajo lógico es necesaria por lo menos alguna intervención de la intuición proveniente del inconsciente.

Con esta restricción, vemos inmediatamente que los procesos descritos anteriormente pueden tener lugar de manera diferente según las diversas inteligencias.

A) *Más o menos profundos en el inconsciente.* Como sabemos que existen diversas capas del inconsciente, algunas próximas al consciente y otras más o menos remotas del mismo, es claro que los niveles en los cuales las ideas se encuentran y se combinan pueden ser más profundos

o más superficiales, y parece natural admitir que cada inteligencia tiene su especial comportamiento desde este punto de vista.

Es completamente natural hablar de una inteligencia más intuitiva si la zona en la cual las ideas se combinan es más profunda y de una inteligencia más lógica si esta zona es más superficial. Esta manera de establecer la distinción me parece de la mayor importancia.

Si dicha zona es profunda, será más difícil llevar el resultado al conocimiento del consciente y en consecuencia ocurrirá que la inteligencia tendrá tendencia a esta acción únicamente en los casos en que sea estrictamente necesario. Me parece que este es el caso de Hermite, quien ciertamente no omitía nada estrictamente esencial en los resultados de sus reflexiones, de manera que sus métodos eran absolutamente correctos y rigurosos, pero sin dejar ninguna huella del camino que le había conducido a ellos.

Es posible, también, que suceda lo contrario: puede haber inteligencias en que las ideas a pesar de ser elaboradas en las capas profundas del inconsciente sean sin embargo llevadas íntegramente a la luz del consciente. Me imagino que este es el caso de Poincaré, cuyas ideas, posiblemente inspiradas por intuiciones profundas, parecen generalmente fluir de manera natural. Es-

te tipo de inteligencias pueden ser aparentemente lógicas, por serlo en la enunciación de sus ideas, pero sin embargo han sido intuitivas en el descubrimiento de las mismas ([10]).

B) *Pensamiento dirigido más o menos estrechamente.* En segundo lugar, hemos visto que la puesta en movimiento de los átomos de Poincaré — o sea, el nacimiento de las ideas, para usar un lenguaje menos metafórico — puede ser más o menos esparcido. Ésta es otra razón por la cual se puede tener la sensación de una inteligencia intuitiva (como ocurrirá si hay mucho esparcimiento) o de una inteligencia lógica (en el caso contrario). Esta segunda razón, por lo menos *a priori,* puede no tener ninguna conexión con la primera, es decir, la dirección del pensamiento puede ser estrecha o ancha independientemente del nivel del inconsciente en que se encuentre. A priori no sabemos si existe o no alguna relación entre estas dos clases de "tendencias intuitivas" pero, de hecho, el ejemplo de Galois que veremos más adelante nos probaría la independencia.

([10]) Como han observado varios autores (véase Meyerson, *Du Cheminement de la Pensée,* Vol. I, citado en Delacroix, *L'Invention et le Génie,* pág. 480), hay a menudo una gran diferencia entre el descubrimiento de una idea y su enunciación.

C) *Distintas representaciones auxiliares.* Hemos visto de cuantas maneras diferentes se comportan los científicos en cuanto a la ayuda que pueden prestar a su pensamiento las imágenes mentales u otras representaciones concretas; diferencias que pueden radicar en la naturaleza de las representaciones o en la manera como ellas influyen en el trabajo de la mente. Es evidente que algunas de estas clases de representaciones pueden dar al pensamiento una trayectoria lógica y otras una trayectoria intuitiva. Pero este aspecto de la cuestión es mucho menos accesible al estudio, precisamente debido a que estos fenómenos no son siempre comparables en inteligencias diferentes.

Lo más general es que se utilicen imágenes, las cuales son muy a menudo de naturaleza geométrica. Hubiera sido interesante disponer, en estas cuestiones, de las autoobservaciones de Hermite, que parecen estar completamente apartadas de consideraciones concretas. (En mi propio caso particular, el papel de las imágenes geométricas al pensar en cuestiones analíticas es muy distinto del que cumplen en las investigaciones geométricas.)

OTRAS DIFERENCIAS ENTRE LAS INTELIGENCIAS MATEMÁTICAS. Las cuestiones anteriores son

las únicas estudiadas hasta la actualidad en lo referente a las diferentes clases de inteligencias matemáticas. Sin embargo, es evidente que los matemáticos pueden diferenciarse entre sí desde otros puntos de vista.

Por ejemplo, existe una teoría, la teoría de grupos, cuya importancia en nuestra ciencia ha ido creciendo incesantemente durante más de un siglo, sobre todo desde la obra de Sophus Lie a fines del siglo XIX. Muchos matemáticos, especialmente contemporáneos, han enriquecido esta teoría con hermosos descubrimientos. Otros —confieso pertenecer a esta categoría— aun siendo capaces de usar la teoría de grupos en aplicaciones simples, sienten una insuperable dificultad en dominar lo que exceda a un conocimiento elemental y superficial de la misma. Sería interesante encontrar las razones psicológicas de esta diferencia, cuya existencia me parece indiscutible.

VIII. — CASOS PARADÓJICOS DE INTUICIÓN

Puesto que en algunas mentes intuitivas excepcionales, las ideas pueden evolucionar y combinarse en capas del inconsciente más profundas que las correspondientes a los casos mencionados, puede suceder que incluso eslabones importantes de la deducción permanezcan desconocidos al pensador mismo que las ha encontrado. La historia de la ciencia ofrece varios ejemplos notables.

FERMAT (1601-1661). Pedro de Fermat era un magistrado, consejero del Parlamento de Tolosa. Vivía en una época en que la vida era menos complicada que actualmente y el deber de sus ocupaciones aparentemente no le impedía sus investigaciones matemáticas, que fueron considerables. Además de haber participado en la iniciación del cálculo infinitesimal y en la creación del cálculo de probabilidades, se ocupó ac-

tivamente de cuestiones aritméticas. Entre las obras de matemáticos antiguos que estaban a su disposición figuraba una traducción de los tratados de Diofanto, autor griego que se había ocupado de dichas cuestiones aritméticas. A la muerte de Fermat se encontró que en el margen de su ejemplar de la obra de Diofanto había escrito la siguiente anotación (en latín) :

"He demostrado que la relación $x^m + y^m = z^m$ es imposible en números enteros (x, y, z diferentes de O; m mayor que 2), pero el margen es demasiado estrecho para que pueda escribir la demostración".

Desde entonces han transcurrido tres siglos y la demostración que Fermat hubiera podido escribir en el margen, de haber sido un poco más ancho, es todavía desconocida. Sin embargo, no parece que Fermat estuviera equivocado, pues se han encontrado demostraciones parciales, es decir, demostraciones para ciertas clases extensas de valores del exponente m: por ejemplo, la demostración ha sido encontrada para todo m no mayor que 100. Pero la obra, inmensa, que ha hecho posible obtener estos resultados parciales no podría obtenerse por consideraciones aritméticas directas [1]; ella ha requerido la ayuda de

[1] El uso de consideraciones de este tipo ha sido intentado por los más grandes maestros —empezando por Abel— durante

importantes teorías algebraicas de las cuales no se tenía conocimiento en la época de Fermat, *ni aparece ninguna idea de ellas en sus escritos.* Después que se hubieron desarrollado varios principios fundamentales del álgebra durante el siglo XVIII y principios del XIX, el matemático alemán Kummer para resolver dicha cuestión, denominada el "último teorema de Fermat", se vió obligado a introducir un nuevo y audaz concepto, los "ideales", idea grandiosa que revolucionó completamente el álgebra. Sin embargo, como acabamos de decir, a pesar de este poderoso instrumneto dado al pensamiento matemático, hasta la fecha solamente ha sido posible obtener pruebas parciales del misterioso teorema.

RIEMANN (1826-1866). Bernhard Riemann, cuya extraordinaria potencia intuitiva ya hemos mencionado, renovó en especial nuestros conocimientos sobre la distribución de los números primos, otra de las cuestiones matemáticas más misteriosas (2). Fué el primero en mostrar cómo

los dos últimos siglos. Todo progreso importante que pueda ser obtenido en esta dirección parece haber sido ya logrado, tratándose en realidad de progresos bien limitados. La Academia de Ciencias Francesa recibe anualmente muchos trabajos sobre esta cuestión, la mayoría de los cuales son absurdos, mientras que otros reproducen resultados conocidos de Abel y otros autores.

(2) Esta cuestión, lo mismo que la de Fermat, se refiere a la aritmética. Efectivamente, la aritmética, que es lo primero que

podían deducirse resultados sobre este asunto partiendo de consideraciones tomadas del cálculo integral; más precisamente, del estudio de una cierta cantidad, función de una variable *s* que puede tomar valores no solamente reales, sino también imaginarios. Demostró importantes propiedades de esta función y además enunció otras dos o tres, también muy importantes, sin dar la demostración. A la muerte de Riemann, se encontró entre sus papeles una nota que decía: "Estas propiedades de ζ (s) (la función mencionada) se deducen de una expresión que no he logrado simplificar lo suficiente como para publicarla".

No tenemos todavía la menor idea de cuál podía ser dicha expresión. En cuanto a las propiedades únicamente enunciadas, pasaron 30 años

se estudia en la enseñanza primaria, es una de las ramas más difíciles, si no la más difícil, de la matemática, cuando se intenta penetrar en ella con alguna profundidad. Los progresos esenciales se obtienen generalmente, como en nuestros ejemplos aquí citados, transformando la cuestión aritmética en otra de álgebra superior o de cálculo infinitesimal.

Debemos observar que el ejemplo de este descubrimiento de Riemann ilustra de nuevo la diferencia entre los dos aspectos de la intuición que Poincaré consideraba como idénticos. En general la intuición de Riemann, como observa Poincaré, es altamente geométrica; su memoria sobre los números primos constituye sin embargo una excepción a esta regla: en esta memoria, en la cual la intuición aparece de la manera más misteriosa y profunda, no desempeñan ningún papel importante los elementos geométricos.

hasta que yo pude demostrarlas todas menos una. Esta última sigue todavía sin resolver, si bien tras una inmensa labor realizada durante este último medio siglo se han hecho interesantes descubrimientos en su dirección. Parece cada vez más probable, si bien todavía no del todo seguro, que la "hipótesis de Riemann" sea cierta. Sin embargo, todos estos complementos podrían conducir a la cuestión de Riemann únicamente con la ayuda de hechos que eran completamente desconocidos en su tiempo, y para una de las propiedades enunciadas por Riemann, es difícilmente concebible cómo pudiera haberla encontrado sin utilizar alguno de estos principios generales, de los cuales no existe ninguna mención en sus trabajos.

GALOIS (1811-1831). Más notable es la personalidad de Evaristo Galois, cuya trágica vida, bruscamente tronchada en plena juventud, dió a la ciencia uno de los monumentos más importantes que conocemos. La naturaleza apasionada de Galois fué cautivada por las matemáticas desde el momento en que cayó en sus manos la geometría de Legendre. Sin embargo estuvo dominado violentamente por otro sentimiento invencible: su entusiasta devoción a las ideas liberales y republicanas, por las cuales luchó de mane-

ra apasionada y a veces imprudente. No obstante, la muerte que encontró a los 20 años no ocurrió en esta lucha, sino en un duelo absurdo.

Galois pasó la noche anterior a este duelo revisando sus notas y descubrimientos. Primero, el manuscrito que había sido rechazado por la Academia de Ciencias por considerarlo ininteligible (no debe extrañar que estas inteligencias extraordinariamente intuitivas sean obscuras). Después, en una carta dirigida a un amigo, hace breve y apresurada mención de otros hermosos puntos de vista, escribiendo febril y repetidamente en el margen "no tengo tiempo". En efecto, pocas horas le quedaban antes de ir donde la muerte le esperaba.

Todas estas profundas ideas fueron en un principio olvidadas y sólo quince años más tarde los científicos se dieron cuenta, con admiración, del valor de la memoria que la Academia había rechazado. Ella significaba una transformación total del álgebra superior, proyectando una plena luz sobre cuestiones que habían sido apenas vislumbradas por los más grandes matemáticos y, al mismo tiempo, relacionando estas cuestiones algebraicas con otras ramas completamente diferentes de la ciencia.

Pero lo que pertenece especialmente a nuestro objeto actual, es un pasaje de la carta escrita

por Galois a su amigo en el cual enuncia un teorema sobre los "períodos" de cierta clase de integrales. Este teorema, bien claro para nosotros actualmente, no podía ser comprendido por los científicos coetáneos de Galois: estos períodos no tenían sentido en el estado de la ciencia de aquella época; lo adquirieron únicamente mediante algunos principios de la teoría de funciones, hoy clásicos, pero que no fueron encontrados hasta más o menos un cuarto de siglo después de la muerte de Galois. Por consiguiente debemos admitir: (1) que Galois debía haber concebido de alguna manera estos principios, (2) que ellos deben haber estado inconscientemente en su mente, puesto que no hace alusión a los mismos a pesar de que por sí solos hubieran representado un importante descubrimiento.

El caso de Galois merece cierta atención con referencia a nuestra distinción anterior. En cierta manera nos recuerda a Hermite. Como él es un matemático totalmente analítico, aunque su interés por las matemáticas fuera despertado por la geometría de Legendre. Uno de sus primeros ensayos, siendo todavía alumno de la escuela media, fué de naturaleza geométrica, si bien éste fué el único de esta tendencia. Es curioso señalar que el profesor de matemáticas de Galois en la escuela secundaria, el profesor Richard,

que tuvo el mérito de descubrir inmediatamente sus cualidades extraordinarias, fué también, quince años más tarde, el profesor de Hermite. Naturalmente, esto no puede considerarse más que como una coincidencia, puesto que el genio de ambos es evidentemente un don de la naturaleza, independientemente de toda enseñanza.

Por otra parte, Galois, que de acuerdo con nuestra definición (A) era evidentemente intuitivo en alto grado, no aparece como tal según la definición (B). En la demostración del teorema general que resuelve definitivamente el problema principal del álgebra, no hay ninguna huella de "ideas esparcidas", ninguna combinación de principios aparentemente heterogéneos; su trabajo es, por decirlo así, de carácter intensivo, no extensivo; y casi estaría inclinado a afirmar lo mismo de los descubrimientos contenidos en su carta póstuma (la escrita en la noche anterior a su duelo fatal), aunque la corriente de pensamiento no puede ser caracterizada de manera tan segura por una simple y breve sucesión de enunciados. Esto no debe excluir una posible conexión entre los aspectos (A) y (B) de la intuición, pero es indudable que en el caso de Galois aparecen como independientes uno de otro.

Desde el segundo punto de vista, es claro que

Galois difiere profundamente de Hermite, cuyo descubrimiento referente a las formas cuadráticas es un ejemplo típico del "pensar de lado".

UN CASO EN LA OBRA DE POINCARÉ. Parece haber pasado inadvertido que un caso análogo se encuentra en los *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* de Poincaré. En su volumen III, pág. 61, se ocupa del cálculo de variaciones y utiliza una condición suficiente de mínimo que es equivalente a una que resulta del método de Weierstrass (véase lo dicho anteriormente, pág. 186). Poincaré no da la demostración de esta condición; habla de ella como de un hecho conocido. Ahora bien, como hemos dicho, el método de Weierstrass no se había publicado todavía cuando Poincaré escribía sus *Méthodes Nouvelles*. Además, no menciona el descubrimiento de Weierstrass, lo que hubiera hecho seguramente si hubiera tenido alguna comunicación particular de este último. Sobre todo, debemos señalar que la condición aparece formulada de manera ligeramente distinta (aunque fundamentalmente equivalente) de la que se obtiene con el método de Weierstrass. ¿Debemos pensar que este método u otro análogo fué en-

contrado por Poincaré y permaneció inconsciente en su mente? ([8]).

Comparaciones históricas. En tales casos es necesario admitir que ciertas partes del proceso mental se desarrollan tan profundamente en el inconsciente que algunas de estas partes, incluso de las más importantes, pueden permanecer ocultas al consciente. Llegamos así muy cerca del fenómeno de la doble personalidad, tal como fué observado por los psicólogos del siglo xix.

Incluso parece que han existido intermediarios entre las dos clases de fenómenos. Me refiero al demonio familiar de Sócrates que le sugería

([8]) El caso parece todavía más extraño si observamos que en la misma página (pág. 261) del tercer volumen mencionado, pocas líneas antes, Poincaré escribe: "Esta investigación se relaciona con la difícil cuestión de la variación segunda".

Ahora bien, en la teoría de Weierstrass —es decir, desde nuestro punto de vista actual del cálculo de variaciones— no interviene para nada la variación segunda, que se deja completamente fuera de consideración.

Por consiguiente, hay una curiosa contradicción en dicha página de los *Méthodes Nouvelles*. La alusión a la "variación segunda" prueba que se trata de un hombre que no tiene noción de la nueva teoría. Por el contrario, Poincaré prueba haber estado enterado de ella al enunciar su condición (A) (su forma de la condición de Weierstrass), puesto que nada de este tipo podía ser pensado desde el punto de vista antiguo, en que únicamente se conocía la "condición de Legendre", menos adecuada para el fin perseguido. Este caso de Poincaré, ¿debe pensarse como una clase de doble personalidad?

las ideas, o a la ninfa Egeria a la que Numa Pompilio consultaba con frecuencia.

Un ejemplo análogo puede mencionarse pertenecientes al campo matemático. Se trata de Cardan, que no sólo inventó la bien conocida transmisión que constituye una parte esencial de los automóviles, sino que transformó fundamentalmente la ciencia matemática por la invención de los imaginarios. Recordemos lo que es una cantidad imaginaria. Las reglas del álgebra prueban que el cuadrado de un número, sea positivo o negativo, es siempre un número positivo; por consiguiente hablar de raíces cuadradas de números negativos es un absurdo. Ahora bien, Cardan cometió deliberadamente este absurdo y empezó a calcular con estas cantidades "imaginarias".

Se podría calificar esto como pura demencia, y sin embargo todo el desarrollo del álgebra y del análisis hubiera sido imposible sin este fundamento, el cual, por otra parte, durante el siglo XIX fué asegurado sobre bases sólidas y rigurosas. Se ha llegado a escribir que el camino más corto y el mejor entre dos verdades del campo real pasa a menudo por el campo imaginario.

Hemos mencionado el caso de Cardan junto con el de Sócrates y Numa Pompilio, por el

hecho de que también el primero de los nombrados, según alguno de sus biógrafos, recibía sugestiones de voces misteriosas durante ciertos períodos de su vida. Sin embargo, los testimonios sobre este punto, por lo menos en los detalles, no siempre están de acuerdo.

IX. — LA DIRECCIÓN GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Antes de intentar cualquier descubrimiento o de resolver un determinado problema, se plantea la cuestión: ¿qué debemos intentar descubrir?; ¿qué problema debemos intentar resolver?

Dos conceptos sobre la invención. Claparède en su conferencia inaugural durante la mencionada reunión en el Centro de Síntesis, observa que hay dos clases de invención: la primera consiste, dado el objetivo perseguido, en encontrar los medios para llegar a él, de modo que en este caso la mente va desde el objetivo a los medios, de la cuestión a la solución; la segunda consiste, por el contrario, en descubrir un hecho y luego ver para lo que puede ser útil, de manera que, en este caso, la mente actúa desde los medios al objetivo, y la contestación se nos presenta antes que la cuestión.

Por paradójico que parezca, esta segunda cla-

se de invención es la más general y lo va siendo cada vez más a medida que la ciencia avanza. Las aplicaciones se encuentran sin buscarlas y se puede decir que todo el proceso de la civilización descansa sobre este principio. Cuando los griegos, varios siglos antes de J. C. consideraban la elipse —es decir, la curva engendrada por los puntos M de un plano tales que la suma MF + MF′ de sus distancias a dos puntos fijos es constante— y encontraban notables propiedades de la misma, no pensaban ni podían pensar en ninguna posible aplicación de tales descubrimientos. Sin embargo, sin estos estudios, Kepler no hubiera podido descubrir, dos mil años más tarde, las leyes de los movimientos de los planetas, ni Newton hubiera podido descubrir la atracción universal.

Incluso otros resultados más estrictamente prácticos obedecen a la misma regla. Los aeróstatos, en sus primeros tiempos, se llenaban con hidrógeno o gas del alumbrado, lo cual constituía un serio peligro de inflamación. Actualmente es posible llenar los aeróstatos con gas incombustible. El progreso ha sido posible por dos razones: primera, por haberse llegado a saber cuáles son las substancias que existen en la atmósfera del Sol y cuáles no; segunda, por las investigaciones de Lord Rayleigh y Ramsay, entre otros,

para determinar la densidad del nitrógeno con una precisión de 1/10.000 en lugar de 1/1000 que se conocía hasta entonces.

Ambos temas fueron estudiados y aclarados sin prever posibles aplicaciones.

Debemos añadir, sin embargo, que inversamente, las aplicaciones son útiles y a veces esenciales a la teoría por el hecho de plantear y señalar a la misma nuevas cuestiones. Se podría decir que la relación constante entre la teoría y las aplicaciones es la misma que existe entre un árbol y sus hojas: el primero sostiene a las segundas, pero éstas le proporcionan el sustento. No es necesario, para ponerlo en evidencia, mencionar importantes ejemplos de la física; basta recordar que el punto de partida de la matemática griega, la geometría, nació de necesidades prácticas, como se deduce de su nombre que significa "medida de la tierra".

Este ejemplo es, sin embargo, excepcional en el sentido de que lo más frecuente es que los problemas de la práctica sean resueltos por los medios que proporcionan las teorías ya existentes: las aplicaciones prácticas de los descubrimientos puramente científicos, a veces muy importantes, se presentan generalmente lejanas en el tiempo (aunque, en los últimos años, el intervalo puede ser acortado considerablemente, como sucedió

en el caso de la radiotelegrafía, cuyo descubrimiento tuvo lugar muy pocos años después del descubrimiento de las ondas hertzianas). Sucede raramente que las investigaciones matemáticas sean emprendidas *directamente* con vistas a un uso práctico determinado; ellas son inspiradas por el deseo, motivo común de toda obra científica, de saber y entender. En consecuencia, entre las dos clases de invención que hemos distinguido, la obra de los matemáticos pertenece generalmente a la segunda.

ELECCIÓN DE TEMA. Dejando a un lado las aplicaciones prácticas, las cuales, si existen, se presentan mucho después, los descubrimientos matemáticos pueden ser más o menos ricos en consecuencias teóricas. Sin embargo, aun éstas nos son generalmente desconocidas en el momento del descubrimiento, como eran desconocidas a los primeros hombres que descubrieron la composición de la atmósfera del Sol las futuras aplicaciones a los aeróstatos.

En consecuencia, ¿cómo debemos escoger los temas de investigación? Esta delicada elección constituye uno de los puntos más importantes en la investigación; de acuerdo con ella se forma, generalmente de manera acertada, nuestro juicio sobre el mérito de un científico.

También de acuerdo con la misma formamos nuestro juicio sobre los investigadores jóvenes. A menudo se han dirigido a mí estudiantes pidiéndome temas de investigación; en tales casos se los he indicado siempre de buena gana, pero debo confesar que —naturalmente de manera provisional— me he sentido inclinado a considerarlos como estudiantes de segunda clase. En un campo diferente, la misma opinión era sostenida por nuestro gran indianista Sylvain Levi, quien me decía que todas las veces que le habían hecho dicha pregunta se sentía tentado de contestar: Usted, joven amigo, que ha seguido nuestros cursos durante tres o cuatro años, ¿no ha advertido nunca algún punto que necesite una mayor investigación?

¿Cómo debe dirigirse esta importante y difícil cuestión? La respuesta no es dudosa: es la misma que daba Poincaré relativa a los medios para el descubrimiento, la misma tanto para el "conductor" como para el "mecanismo". El guía en el que debemos confiar es nuestro sentido de belleza científica, esta sensibilidad estética especial cuya importancia señaló el mismo Poincaré.

Tal como refiere elegantemente Renán ([1]), existe un gusto científico, lo mismo que existe

([1]) *L'Avenir de la Science*, pág. 115.

un gusto literario o artístico; gusto que según la persona puede ser más o menos seguro.

Respecto a la fertilidad del futuro resultado, acerca de lo cual, hablando estrictamente, la mayoría de las veces no se conoce nada de antemano, el mismo sentido de belleza puede informarnos y no veo nada más que permita tal previsión. Por lo menos toda controversia respecto a esta cuestión me parece que no podría ser más que una mera cuestión de palabras. Sin conocer nada más, *sentimos* que una cierta dirección de investigación merece ser seguida; sentimos que la cuestión por sí misma tiene interés, que su solución será de algún valor para la ciencia, permita o no ulteriores aplicaciones. Cada uno es libre de llamar o no a esto un sentimiento de belleza. Éste es indudablemente el móvil que guiaba el pensamiento de los antiguos griegos cuando estudiaban las propiedades de la elipse, pues no hay otro móvil concebible.

En cuanto a las aplicaciones, aunque completamente imprevisibles, si nuestro sentimiento de belleza ha sido acertado, generalmente aparecen más tarde. Voy a relatar uno o dos ejemplos personales, esperando se me disculpe por esta repetida intervención de mi propio ejemplo, sobre el cual, naturalmente, estoy especialmente informado.

Cuando presenté mi tesis doctoral para ser examinada, Hermite observó que sería útil encontrarle aplicaciones. En aquel momento yo no tenía ninguna. Ahora bien, durante el tiempo transcurrido desde que mi manuscrito fué entregado hasta el día en que debía sostener la tesis, me enteré de una importante cuestión (la misma de que ya hablé en la pág. 196 relacionada con Riemann) que había sido propuesta como tema para premio por la Academia de Ciencias Francesa. Ocurrió que, precisamente, los resultados de mi tesis daban la solución de la cuestión. El sentimiento de interés del problema, único que me había guiado, me había conducido por el buen camino.

Pocos años después, habiendo obtenido en un posterior estudio sobre cuestiones análogas un resultado muy simple que me parecía elegante (2), lo comuniqué a mi amigo el físico Duhem. Este me preguntó qué aplicaciones tenía. Cuando le contesté que hasta entonces no había pensado en ello, Duhem, que era notable artista, tanto como físico prominente, me comparó con un pintor que empezara por pintar un paisaje sin salir de su estudio y después de terminado saliera a pasear en busca del paisaje de la naturaleza que se adaptase a su cuadro. Este argumento

(2) Para técnicos: el "teorema de composición".

parecía adecuado, pero, de hecho, tuve razón en no preocuparme de las aplicaciones: ellas vinieron solas más tarde.

Algunos años antes (1893), me había sentido atraído por una cuestión de álgebra (sobre los determinantes). Al resolverla no sospechaba en modo alguno que pudiera tener ningún uso determinado, *sintiendo* únicamente que el asunto ofrecía interés. Más tarde, en 1900, apareció la teoría de Fredholm [8], para la cual mi resultado de 1893 resultó ser esencial.

Los hechos más sorprendentes —casi podría decir desconcertantes— de este tipo, se relacionan con la evolución extraordinaria de la física contemporánea. En 1913, Élie Cartan, uno de los primeros matemáticos franceses, pensó en una notable clase de transformaciones analíticas y gométricas en relación con la teoría de grupos. En su tiempo no se veía ninguna otra razón para la consideración de esas transformaciones que su atractivo estético. No obstante, quince años más tarde, los experimentos revelaron a los físicos ciertos fenómenos extraordinarios relativos a los electrones que únicamente pudieron explicarse con la ayuda de las ideas de Cartan de 1913.

[8] Ésta es la teoría que, como dije en la Sección IV, no logré descubrir. Fué para mi propia estima un consuelo haber por lo menos construído un eslabón necesario para los argumentos de Fredholm.

Sin embargo, el ejemplo más típico a este respecto lo constituye el origen del moderno cálculo funcional. Cuando Juan Bernoulli, en el siglo XVIII, se preguntó por la curva a lo largo de la cual un punto material caería desde un punto A a otro B en el menor tiempo posible, fué seducido por la belleza del problema, bien diferente de los tratados hasta entonces, aunque ofrecía ciertas analogías con los problemas que se trataban por el cálculo infinitesimal. Lo único que podía atraer a Bernoulli era esta belleza. Sin embargo, las consecuencias que el "cálculo de variaciones" —es decir, la teoría de los problemas de este tipo— tuvo para el progreso de la mecánica a fines del siglo XVIII y a principios del XIX no hubieran podido sospecharse en el momento de nacer el problema.

Mucho más sorprendente es el destino que tuvo la extensión que se dió a estas ideas iniciales en las últimas décadas del siglo XIX, principalmente bajo el poderoso impulso de Volterra. ¿Qué motivo *impulsó* al gran geómetra italiano a operar con las funciones de manera análoga a como el cálculo infinitesimal opera con números, es decir, a considerar una función como un elemento variable con continuidad? Únicamente el comprender que éste era un camino armonioso para completar la arquitectura del edifi-

cio matemático, de la misma manera como el arquitecto ve que un edificio estará mejor equilibrado añadiéndole una nueva ala. Cabría imaginar que, como dijimos en la Sección III, una tan armoniosa construcción podría ser útil para resolver problemas referentes a funciones consideradas de la manera dicha, pero que estos "funcionales", como se llama al nuevo concepto, pudieran estar en relación directa con la realidad parecía forzosamente algo absurdo. Los funcionales parecían ser una creación esencial y totalmente abstracta de los matemáticos.

Ahora bien, lo curioso es que dicho absurdo se produjo. Por incomprensible e inconcebible que parezca, en las ideas de la física contemporánea (en la reciente "mecánica ondulatoria") la nueva noción, cuya exposición es accesible únicamente a estudiantes familiarizados con el cálculo superior, es absolutamente necesaria para la representación matemática de todo fenómeno físico. Todo elemento observable, como una presión, una velocidad, etc., que se acostumbraba definir por un número, no puede considerarse ya como tal, sino que debe representarse matemáticamente por un funcional.

Estos ejemplos constituyen una respuesta suficiente a la duda de Wallas sobre el valor del sentido de belleza como "guía" en los descubri-

mientos. Por el contrario, en nuestro campo matemático, parece ser el único eficiente.

Vemos de nuevo como la dirección del pensamiento implica elementos afectivos, especialmente para lograr la continuidad en la atención y la fe de la inteligencia hacia un objetivo, la importancia de lo cual ya hemos señalado en la Sección IV (4). En esta etapa, lo mismo que para la inspiración, la elección está dirigida por el sentimiento de belleza, en el cual confiamos en este caso de manera consciente, mientras que para la inspiración el mismo sentimiento se manifiesta en el inconsciente.

DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN Y DESEO DE ORIGINALIDAD. ¿Puede la dirección de la investigación estar influída por otras razones?

Como observa con razón el doctor de Saussure, pueden intervenir a menudo causas emocionales (de lo cual me señala varios ejemplos típicos de la vida de Freud, creador del psicoanálisis). Sin embargo, esta posibilidad es menor en el caso de los matemáticos, debido al carácter abstracto de esta ciencia en la cual, según la famosa frase de Bertrand Russell, "nunca sabemos de qué es-

(4) En una cuestión de geometría de la inversión (ver Sección IV), desprecié la belleza de la misma y no le dediqué la suficiente continuidad de atención.

tamos hablando ni si lo que decimos es verdad".

El doctor de Saussure se ha planteado la cuestión de si los creadores pueden ser movidos a veces por una clase de pasión menos laudable, derivada de la humana vanidad, tal como el deseo de hacer algo distinto de los demás.

Me parece que esto es posible en arte o literatura. Más exactamente, dejando aparte toda cuestión de vanidad, el hecho de no ser igual a los demás es un requisito que el artista (o el literato) debe considerar en sí mismo. Evidentemente esta observación en realidad no es aplicable a los artistas realmente grandes; hemos visto, por ejemplo, en la carta de Mozart (pág. 42) que no tenía que pensar en ser original. Pero, ¿no es posible que esta necesidad tenga su parte de influencia en la fundación de algunas escuelas de pintura, o en las obras en que algunos literatos tratan de interpretar de manera paradójica las acciones o la psicología de personalidades conocidas? Es efectivamente lícito hacerse esta pregunta.

Podemos ver cierta relación entre esta cuestión y algunos casos conocidos en que poetas u otros artistas han producido obras en estados anormales (por ejemplo, Coleridge en un estado de sueño provocado por el láudano). Wallas [5],

[5] *The Art of Thought*, págs. 206-210. El hecho de que los

que refiere estos ejemplos, considera que un pequeño grado de "disociación mental" puede ser útil al artista "que desea romper con sus propios hábitos de pensamiento y de visión y con los de su escuela". Así, no es raro oír de obras poéticas compuestas en sueños, si bien ya hemos visto que esto es excepcional, si no dudoso, en cuanto a la producción matemática.

El caso del científico que, como dijimos al principio, es servidor y no señor, es efectivamente distinto. Todo resultado, la solución de todo problema que resuelve, le hacen aparecer nuevos problemas. De hecho, yo podría señalar a lo sumo dos o tres memorias a este respecto, que calificaría más bien como extravagantes que como verdaderamente originales.

Sin embargo, el científico puede sentirse, y a menudo se siente, desilusionado para estudiar tal o cual problema no por el conocimiento de que ya ha sido resuelto, sino por el temor de que ya haya sido resuelto sin su conocimiento, lo que haría inútil su trabajo. O bien —y esto es más desinteresado de su parte— se siente naturalmen-

maestros verdaderamente grandes no necesitan esforzarse para ser originales, es interpretado por Wallas diciendo que para ellos "en el momento de la producción se logra una verdadera armonía entre la intensa actividad de todo el sistema nervioso, lo mismo en su parte más elevada que en la más baja, y la voluntad consciente".

te atraído por una cuestión no carente de importancia por el hecho de haber sido desdeñada hasta entonces. Éste ha sido con frecuencia mi caso y añadiré que varias veces, después de haber iniciado ciertas cuestiones y viendo que varios autores han empezado a seguir la misma orientación, las abandoné y me puse a investigar otras cosas. He oído de algunos físicos que varios de los hombres más prominentes de la física contemporánea proceden de la misma manera.

Vemos así claramente cuán equivocado estaba Souriau, debido seguramente a que no hizo encuestas directas entre especialistas, cuando hablaba de ellos como deseosos de un gran descubrimiento "para llamar la atención del público" o para "obtener una posición halagüeña e independiente". Se puede admitir que esta clase de motivos influyan en ciertas ocasiones en la vida de alguno de nosotros —cuando se intenta rebajar nuestra obra— como lo hace la clásica frase: "Tú duermes, Bruto". Es posible que Ampère hiciera más que contestar a las urgentes solicitudes de Julia Ampère cuando le escribía que con la publicación de uno de sus descubrimientos tendría el medio de asegurarse un cargo de profesor en un liceo. Pero no fué esto lo que le permitió conquistar el título de descubridor; no puedo concebir un científico que llegara a des-

cubrir alguna cosa teniendo éste por principal motivo. Los profesionales con esta clase de inteligencia pueden dar únicamente pobres resultados; tanto si radica en la elección del tema, como en su exposición, un hombre sin algún amor a la ciencia no puede triunfar, por ser incapaz de elegir (6).

(6) Puntos de vista substancialmente análogos a los nuestros de esta Sección constituyen el tema del reciente y sugestivo librito de G. H. Hardy titulado *A Mathematician's Apology*. Aunque él no llega a una completa definición de la belleza —o, según su nomenclatura, de la "seriedad"— de una cuestión matemática o de un resultado, para lo cual debe intervenir desde luego el sentimiento estético, hace un delicado y agudo análisis de las condiciones convenientes para aproximarse a una tal definición.

Discute también los motivos que pueden influir en los deseos de investigar, señalando tres fundamentales, de los cuales el primero es, naturalmente, el deseo de conocer la verdad. Por la razón dada en el texto, debo insistir más que Hardy en el carácter predominante e incluso necesario de este primer motivo.

OBSERVACIONES FINALES

He intentado explicar e interpretar observaciones personales o tomadas de otros profesores ocupados en trabajos de investigación. Quedan todavía otros muchos aspectos importantes del mismo problema, especialmente aspectos "objetivos" que ya hemos tenido ocasión de señalar. Tales son las posibles relaciones entre el pensamiento de invención y los fenómenos corporales. Sería interesante proseguir en un orden de ideas más o menos análogo al iniciado por Gall. ¿Cómo se puede hacer esto? Sería necesario para ello alguien más calificado que yo, mejor versado en la fisiología del cerebro. Sin embargo, en este punto topamos con la dificultad que mencioné al principio; mientras que los matemáticos carecen de conocimientos suficientes en neurología, no se puede esperar que los neurólogos puedan penetrar profundamente (como sería necesario) en los estudios matemáticos. ¿Llegará el momento en que los matemáticos conozcan lo suficiente

de la fisiología del cerebro y los neurólogos lo suficiente acerca del descubrimiento matemático para que sea posible una cooperación eficiente?

Análogamente, no puedo aventurarme a decir nada acerca de las influencias sociales e históricas que seguramente actúan sobre la invención, lo mismo que sobre otras cosas. No conozco mucho acerca del mecanismo de esta influencia, ni sé si la misma es conocida por nadie. Los ensayos como el de Taine en su *Philosophie de l'Art*, aunque su iniciación lleva la marca del genio, son ciertamente prematuros y muy hipotéticos en sus conclusiones. Efectivamente, las dificultades de tales tentativas son obvias; no solamente por el hecho de que no es posible realizar experiencias, sino porque —prescindiendo de los genios— los hombres con potencia inventiva notable son demasiado raros para permitir una aplicación extensa de métodos comparativos, de manera que la cuestión de Taine y la nuestra misma son de las más difíciles, incluso entre las de naturaleza histórica. Las influencias sociales gobiernan el desarrollo matemático de la misma manera inconsciente y misteriosa que gobiernan el desarrollo literario o artístico. Puede ciertamente contener algo de razón la idea de Klein sobre la intervención de las teorías hereditarias de Gal-

ton en lo referente a las cualidades intuitivas y lógicas de la mente (y lo mismo puede decirse de la aptitud matemática en general y de la manera como las distintas mentes usan las representaciones concretas), pero es completamente improbable que las cosas sean tan simples como imagina la escuela de Taine. Ciertamente no es una circunstancia fortuita que durante el Renacimiento aparecieran, sobre todo en Italia, tantos hombres extraordinarios de toda clase, desde un Benvenuto Cellini y un Leonardo da Vinci hasta un Galileo, pero es más dudoso que las razones de este maravilloso fenómeno sean las supuestas por Taine (1).

Las cosas aparecen más claras cuando, en lugar del caso general, se consideran algunos casos particulares. Veamos el caso de Cardan, que vivió en la época del Renacimiento y que fué uno de los caracteres más extraordinarios de aquel tiempo extraordinario. Parecería natural que el

(1) La semejanza entre la evolución de las ideas en los filósofos griegos y en los pensadores posteriores a Jesucristo, en lo referente al pensamiento con o sin palabras, ¿será más que una coincidencia fortuita y significará una ley general en la evolución del pensamiento? Desde luego no debemos atrevernos a contestar afirmativamente sobre la base de sólo dos ejemplos. Pero si se llegase a probar, sería un hecho de la mayor importancia. Un estudio sobre esta cuestión en la filosofía de los árabes (especialmente en su período español) o en las filosofías orientales podría ser de mucho interés.

descubrimiento de los números imaginarios, que parecen estar más cerca de la locura que de la lógica y que en realidad iluminaron toda la ciencia matemática, hubiera sido hecho por un hombre como él, cuya esforzada vida no siempre fué loable desde el punto de vista moral y que desde la infancia sufría de fantásticas alucinaciones hasta tal punto que fué elegido por Lombroso como un ejemplo típico en el capítulo "Genio y locura" de su libro *El hombre de genio.*

Sin recurrir a estos casos especiales, el carácter excepcional del fenómeno que hemos considerado crea un obstáculo para su estudio, mientras no se disponga de los datos suministrados por la introspección. Pero, por otra parte, se puede esperar que tales procesos puedan prestar ayuda para aclarar los que ocurren en otros puntos de la psicología; por ejemplo, como hemos visto, es posible que los examinados en la Sección VI tengan ciertos aspectos en común con el papel de las imágenes tal como las considera Taine o con problemas presentados por la teoría de la forma. De acuerdo con una regla que parece aplicarse a toda ciencia de observación (y que se aplica también en matemáticas según resulta del hecho mencionado en la Sección VIII, nota de la pág. 194) son los fenómenos excepcionales los más indicados para explicar los normales; y en consecuen-

cia, todo lo que podamos observar que tenga alguna relación con la invención o tan sólo, como en este estudio, con una clase determinada de invención, sirve para arrojar una luz sobre la psicología en general.

APÉNDICE I

ENCUESTA SOBRE EL MÉTODO DE TRABAJO DE LOS MATEMÁTICOS

Traducido de *L'Enseignement Mathématique,* Vol. IV, 1902, y Vol. VI, 1904

1. ¿En qué época, según sus recuerdos, y en qué circunstancias empezó a sentir el interés por las matemáticas? (1) * ¿Este interés por las matemáticas es en su caso hereditario? ¿Ha habido entre sus ascendientes o entre los demás miembros de su familia (hermanos, hermanas, tíos, primos...) personas especialmente dotadas desde el punto de vista matemático? ¿Su ejemplo o su acción han influído en algo en su inclinación por las matemáticas?

2. ¿Cuáles son las ramas de la ciencia matemática hacia las cuales siente una mayor atracción?

3. ¿Se siente atraído por el interés de la ciencia matemática en sí mima o por las aplicaciones de esta ciencia a los fenómenos de la naturaleza?

4. ¿Ha conservado algún recuerdo preciso de su manera de trabajar cuando cursaba sus estudios, cuyo

(1) Los ítems precedidos de un asterisco aparecieron en el Volumen VI de *L'Enseignement Mathématique.*

objeto era más bien asimilar los resultados de otros que emprender investigaciones personales? Sobre este punto, ¿tiene usted algunos detalles interesantes que proporcionar?

5. Una vez terminados los estudios corrientes de matemáticas (correspondientes por ejemplo a los programas de la licenciatura en matemáticas, o de la "Agregación" (2) o de las dos licenciaturas) ¿en qué sentido ha creído deber orientar sus estudios? ¿Ha intentado adquirir primero una instrucción general muy extensa sobre varios puntos de la ciencia antes de producir o de publicar algún trabajo de importancia? O bien, por el contrario, ¿ha intentado usted profundizar antes un punto particular, estudiando sólo lo que le era indispensable para este objeto y únicamente después ha ido ensanchando poco a poco sus conocimientos? Y si ha empleado otro método, ¿puede usted indicarlo brevemente? ¿Cuál es el que usted prefiere?

6. ¿Ha intentado darse cuenta de las génesis de las verdades descubiertas por usted a las que atribuye el máximo valor?

7. ¿Cuál es, según usted, la parte con que contribuyen el azar o la inspiración en los descubrimientos matemáticos? ¿Esta parte es siempre tan grande como parece?

8. ¿Ha observado alguna vez que algún descubrimiento o una solución sobre un asunto completamente extraño a sus estudios del momento le hayan aparecido cuando ellos correspondían a investigaciones anteriores infructuosas?

(2) Grado o mejor un examen que se exige para ser profesor de escuela secundaria.

* 8b. ¿Le ha sucedido alguna vez calcular o resolver problemas durante el sueño o ver surgir terminados, en el momento de despertarse por la mañana, soluciones o descubrimientos ya sean completamente inesperados o bien perseguidos vanamente durante la víspera o los días precedentes?

9. ¿Cree usted que sus principales descubrimientos hayan sido el resultado de un trabajo voluntario, dirigido en un sentido preciso, o bien se han presentado a su espíritu, por decirlo así, de una manera espontánea?

10. Cuando ha obtenido un resultado, sobre un asunto que perseguía con el objeto de publicar sus investigaciones, ¿redacta usted inmediatamente la parte correspondiente del trabajo? O bien, al contrario, va acumulando sus resultados bajo la forma de simples notas, esperando darles forma acabada cuando formen un conjunto importante?

11. De manera general, ¿cuál es la importancia que usted atribuye a la lectura de investigaciones matemáticas? ¿Qué consejos daría a este respecto a un joven que poseyera los conocimientos clásicos habituales?

12. Antes de empezar un trabajo, ¿trata de asimilar previamente todos los trabajos que hayan sido producidos sobre el mismo tema?

13 ¿O bien prefiere, por el contrario, dejar a su espíritu en entera libertad para comprobar después la parte que ha sido personal en los resultados obtenidos?

14. Cuando aborda una cuestión, ¿procura estudiar inmediatamente de la manera más general posible los problemas más o menos precisos que se ha propuesto,

o prefiere en general tratar primero algunos casos particulares, o un caso concreto, para generalizarlos luego progresivamente?

15 ¿Hace usted alguna distinción, desde el punto de vista del método, entre el trabajo de invención y el de redacción?

16. Sus métodos de trabajo, ¿le parece haber seguido siendo los mismos una vez terminados sus estudios?

17. En sus principales investigaciones, ¿ha perseguido constantemente su objetivo, sin discontinuidad, o bien ha abandonado el tema en ciertos momentos para volver más tarde sobre el mismo?

Si ha practicado los dos métodos, ¿cuál de los dos considera en general preferible?

18. ¿Cuál es, según usted, el tiempo mínimo que un matemático que tenga otras ocupaciones cotidianas debe dedicar cada día, o semanal y anualmente a las matemáticas para llegar a cultivar con provecho algunas ramas de las mismas matemáticas? Considera mejor, cuando ello es posible, trabajar todos los días un poco, por ejemplo una hora como mínimo?

19. Las ocupaciones o distracciones artísticas o literarias, en particular la música y la poesía, ¿le parecen que perjudican la invención matemática o bien que la favorecen por el descanso que significan momentáneamente para el espíritu?

* 19ª. ¿Cuáles son sus distracciones u ocupaciones favoritas, sus gustos dominantes, fuera de lo estudios matemático, en los momentos de descanso? 19ᵇ) ¿Se siente atraído por cuestiones de orden metafísico, ético

o religioso, o, por el contrario, siente aversión por las mismas?

20. Si tiene ocupaciones profesionales absorbentes, ¿cómo las coordina con sus trabajos personales?

21. En resumen, ¿qué consejos daría usted: a) a un estudiante de matemáticas, b) a un joven que habiendo terminado sus estudios ordinarios desease proseguir una carrera científica?

CUESTIONES PARTICULARES RELATIVAS AL MODO DE VIDA DEL MATEMÁTICO

22. ¿Considera útil para el matemático la observación de algunas reglas particulares de higiene: régimen, horario de las comidas, tiempo de descanso, etc.?

23. ¿Cuántas horas considera necesario dormir diariamente?

24. ¿El trabajo diario del matemático debe ser interrumpido, según su opinión, por otras ocupaciones o por ejercicios físicos adecuados a la edad o la fuerza de cada uno?

25. O bien, al contrario, ¿es necesario perseverar en el trabajo el día entero, sin dejarse distraer por nada, para tomarse luego algunos días enteros de descanso? *) 25[b].) ¿Ha notado usted fases de excitación y de adiestramiento, seguidas de otras de depresión y de incapacidad para el trabajo? 25[c].) ¿Ha observado si estas alternativas presentan períodos regulares y, en tal caso, cuál es aproximadamente el número de días de la fase de actividad y de la fase de inercia? 25[d].) Las circunstancias ambientes físicas y meteorológicas (temperatura, claridad u obscuridad, estaciones del año,

etcétera) ¿tienen influencia apreciable sobre sus facultades de trabajo?

26. ¿Qué ejercicios físicos practica o ha practicado como distracción de los trabajos intelectuales? ¿Cuáles de ellos considera preferibles?

27. ¿Prefiere trabajar por la mañana o por la tarde?

28. Los períodos de vacaciones, si los tiene, ¿los utiliza usted para trabajar en matemáticas (¿y en qué grado?) o bien los consagra íntegramente a la distracción y al descanso?

Observaciones finales. *) Habría naturalmente muchos otros detalles que sería útil conocer mediante una encuesta: 29 a) si se trabaja mejor de pie, o sentado, o tendido; b) sobre el pizarrón o sobre el papel; c) hasta qué punto se siente distraído por los ruidos externos; d) si puede proseguir el estudio de un problema mientras pasea o viaja en ferrocarril; e) la influencia de los calmantes o de los excitantes: tabaco, café, alcohol, etc., sobre la cantidad y la calidad del trabajo.

* 30. Desde el punto de vista psicológico sería muy importante saber cuáles son las imágenes interiores o de qué forma de "palabra interior" se sirven los matemáticos; si ellas son motoras, auditivas, visuales o mixtas y si varían según el asunto que se está estudiando.

Si alguna persona que haya conocido de cerca algún matemático desaparecido estuviera en condiciones de proporcionar indicaciones referentes a alguna de las cuestiones anteriores, le rogaríamos encarecidamente hacerlo. Con ello haría una contribución importante

al estudio de la historia de la ciencia matemática y de su desarrollo.

Agregado del autor. La cuestión final 30 corresponde a nuestra discusión de la Sección VI, y sería particularmente interesante obtener más respuestas a la misma. Tales respuestas deben ser de dos clases diferentes, correspondientes respectivamente al pensamiento ordinario y al esfuerzo de investigación.

Además, la pregunta 30 debería completamentarse con:

31ª) En especial para el pensamiento de investigación, ¿las imágenes mentales o las palabras interiores se presentan en el pleno consciente o en el consciente marginal (tal como lo define Wallas en su *Art of Thought,* págs. 51, 95 o bajo el nombre de "antecámara del subconsciente" en Galton, *Inquiries into Human Faculty,* pág. 203 de la edición de 1883 y pág. 146 de la edición de 1910)?

31ᵇ.) Se formula la misma pregunta con referencia al argumento que estas imágenes mentales o palabras puedan simbolizar (3).

(3) Hasta ahora sólo pocos matemáticos han contestado a las preguntas 31ª) y 31ᵇ) haciéndolo especialmente en lo referente a argumentos topológicos, como la demostración del teorema de Jordan (véase Sección VII, pág. 174). Para todos ellos sin excepción, lo que directamente aparece en su consciente pleno es el aspecto geométrico del argumento. Uno o dos de ellos sienten inmediatamente la posibilidad de aritmetizarlo e incluso son capaces de encontrar esta aritmetización (de manera que debe estar presente en su consciente marginal); para otros, esta aritmetización requeriría un esfuerzo más o menos intenso.

APÉNDICE II

EL TESTIMONIO DEL PROFESOR EINSTEIN

Referente a las cuestiones tratadas en este estudio y, especialmente, a las expuestas en la Sección VI, el autor ha recibido varias respuestas a ciertas preguntas que formuló. Todas han sido valiosas, pero una de ellas es más importante que ninguna, no solamente por la personalidad de su autor, sino por tratar la cuestión de una manera completa y minuciosa. Es la debida al gran científico Albert Einstein y dice lo siguiente (1):

Estimado colega:

En lo que sigue voy a intentar contestar brevemente a sus preguntas lo mejor que pueda. No estoy yo mismo satisfecho de estas respuestas y estaría dispuesto de buena gana a contestarle más preguntas si usted creyera que ello pudiera ser de alguna utilidad para la obra muy interesante y difícil que ha emprendido.

(1) Las preguntas (A), (B), (C) corresponden al Nº 30 del cuestionario de *L'Enseignement Mathématique* (ver Apéndice I).

La pregunta (D), de tipo psicológico, la he formulado con referencia al pensamiento normal, no al pensamiento de invención.

La pregunta (E) corresponden a nuestro número 31.

(A) Las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no creo que desempeñen ningún papel en el mecanismo de mi pensamiento. Los entes físicos que parecen servir de elementos al pensamientos son ciertos signos y ciertas imágenes más o menos claras que pueden ser "voluntariamente" reproducidas y combinadas.

Existe, evidentemente, cierta conexión entre estos elementos y los correspondientes conceptos de la lógica. Es también claro qu el deseo de llegar finalmente a conceptos ligados lógicamente es la base emocional de este juego un poco vago entre los elementos mencionados. Pero considerado desde un punto de vista psicológico, este juego de combinaciones parece ser la característica esencial del pensamiento productivo, antes de que haya ninguna conexión con construcciones lógicas mediante palabras u otras clases de signos que puedan ser comunicados a los demás.

(B) En mi caso, los elementos mencionados son del tipo visual y algunos de tipo muscular. Las palabras convencionales u otros signos deben buscarse únicamente en una segunda etapa, cuando el juego asociativo mencionado está suficientemente establecido y puede reproducirse a voluntad.

(C) De acuerdo con lo dicho, el juego con los elementos mencionados debe considerarse análogo al hecho de buscar ciertas conexiones lógicas.

(D) Visual y motor. En determinada etapa, cuando las palabras intervienen completamente, son en mi caso puramente auditivas, pero intervienen solamente en una etapa secundaria, como ya hemos dicho.

(E) Me parece que lo que usted llama consciente pleno es un caso extremo al que nunca se puede llegar.

Me parece que esto se relaciona con el hecho llamado la limitación del consciente (*Engedes Bewusstseins*).

Observación: El profesor Max Wertheimer ha intentado investigar la distinción entre la simple asociación o combinación de elementos reproducibles y el entendimiento (*organisches Begreifen*). No puedo juzgar hasta qué punto su análisis psicológico llega a captar lo esencial (2).

Con atentos saludos.

ALBERT EINSTEIN.

(2) Como se puede ver, en la mente del profesor Einstein los fenómenos son en substancia análogos a los mencionados en la Sección VI, naturalmente con algunas modalidades especiales en ciertos detalles. Una diferencia más importante y notable aparece en la pregunta (E), o sea, en lo referente al papel de los conscientes marginal y pleno. El profesor Einstein se refiere a la "proximidad del consciente", cuestión de la que hubiera deseado hablar en la Sección II si no hubiera temido apartarme demasiado del tema, y que está tratada en la *Psychology* de William James (cap. XIII, págs. 217 y sigtes.).

Sería interesante comparar las ideas de Max Wertheimer (relacionadas con la escuela de la Forma) no solamente con nuestra Sección VI, sino también con la primera parte de la Sección VII.

El 15 de mayo de 1947
se acabó de imprimir este libro
en los Talleres Gráficos Américalee
calle Tucumán 353
Buenos Aires

IMPRESO EN ARGENTINA
PRINTED IN ARGENTINE